Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
21. Oktober 2011

Beispiel einer rekursiv definierten Folge:

Man betrachte folgende rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 = 0, \qquad \text{und für } n \geq 2: \; a_n = \frac{1}{4}\sqrt{a_{n-1}^2 + \frac{1}{2}}.$$

Die ersten Folgenglieder ergeben sich als

$$a_1 = 0,\; a_2 = 0.17678,\; a_3 = 0.18222,\; a_4 = 0.18255, \ldots$$

1. Wir zeigen zunächst, daß die Folge beschränkt ist:

   Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \leq a_n \leq 1$.

   Beweis durch vollständige Induktion:

   - Induktionsanfang: $n = 1$: Es gilt:

     $$0 = a_1 \leq 1,$$

     d.h. für $n = 1$ ist die Behauptung erfüllt.
   - Induktionsannahme: Gelte $0 \leq a_n \leq 1$.
   - Induktionsschluß: Es ist zu zeigen: $0 \leq a_{n+1} \leq 1$. Dies gilt da:

     $$a_{n+1} = \frac{1}{4}\sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2}} \overset{\text{IA}}{\geq} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} \geq 0,$$

     nach I.A.: $a_n \geq 0$

     $$a_{n+1} = \frac{1}{4}\sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2}} \overset{\text{IA}}{\leq} \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{1}{2}} \approx 0.30619 \leq 1.$$

     nach IA.: $a_n \leq 1$

   Also wurde gezeigt, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

2. Wir zeigen nun, daß die Folge monoton wachsend ist:

   Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$.

   Beweis durch vollständige Induktion:

   - Induktionsanfang: $n = 1$: Es gilt:

     $$a_1 = 0 \leq \frac{1}{4}\sqrt{0 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = a_2,$$

     d.h. für $n = 1$ ist die Behauptung erfüllt.
   - Induktionsannahme: Gelte $a_n \leq a_{n+1}$.

- Induktionsschluß: Es ist zu zeigen: $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Dies gilt da:

$$a_{n+2} = \frac{1}{4}\sqrt{a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}} \overset{\text{I.A.}}{\geq} \frac{1}{4}\sqrt{a_n^2 + \frac{1}{2}} = a_{n+1}.$$

nach I.A.: $a_{n+1} \geq a_n$

Also wurde gezeigt, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monton wachsend ist.

Also haben wir gezeigt, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert**.

3. Grenzwertbestimmung: Wir bezeichnen den (vorerst unbekannten) Grenzwert der Folge mit a. D.h. es gilt

$$a_n \to a, \quad \text{und insbesondere auch } a_{n-1} \to a.$$

Also:

$$a_n = \frac{1}{4}\sqrt{a_{n-1}^2 + \frac{1}{2}}$$

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}$$

Zur Grenzwertbestimmung ist somit die folgende Gleichung zu lösen:

$$a = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}.$$

Quadrieren dieser Gleichung ergibt:

$$a^2 = \frac{1}{16}\left(a^2 + \frac{1}{2}\right),$$

bzw. nach a^2 aufgelöst

$$\frac{15}{16}a^2 = \frac{1}{32}, \qquad \text{d.h. } a^2 = \frac{1}{30}.$$

Somit erhalten wir die Lösungen $a = 1/\sqrt{30}$ und $a = -1/\sqrt{30}$. Da a positiv sein muß, muß der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich

$$a = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0.1825741858.$$

sein.