Folie zur Vorlesung “Mathematik A”
27. Oktober 2011

Konvergenzkriterien:

Satz: Quotienten-Kriterium

1. Falls ein q mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß für alle $n \geq n_0$
$$a_n \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q,$$
so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

2. Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1,$$
so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis:

1. Gelte $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q < 1$ für alle $n \geq n_0$, d.h.
$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot q \leq |a_{n-1}| \cdot q^2 \leq |a_{n-2}| \cdot q^3 \leq \cdots \leq |a_{n_0}| \cdot q^{n+1-n_0}.$$
Also:
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n_0}| \cdot q^{n+1-n_0} \\
&= \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + |a_{n_0}| \cdot q \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} q^{n-n_0} \\
&= \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n|}_{<\infty} + |a_{n_0}| \cdot q \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}_{=1/(1-q)} < \infty.
\end{aligned}$$

2. Gelte nun $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, d.h.

$$|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq |a_{n-2}| \geq \cdots \geq |a_0|.$$

Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n_0}|}_{=\infty} = \infty.$$

$\square$

Bemerkungen:

1. Die Bedingung $|a_{n+1}|/|a_n| < q < 1$ ist erfüllt, falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1.$$

2. Falls $q = 1$ ist, so kann keine Entscheidung getroffen werden:

   (a) Betrachte

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

   Hier gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

   Es ist aber bereits bekannt, daß diese Reihe <u>divergiert</u>.

   (b) Betrachte

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

   Hier gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

   Es ist aber bereits bekannt, daß diese Reihe <u>konvergiert</u>.

Satz: Leibniz-Kriterium

> Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine <u>alternierende</u> Reihe, wobei die Absolutbeträge $|a_n|$ eine <u>monoton fallende Nullfolge</u> bilden, so ist die Reihe konvergent. Außerdem gilt unter den obigen Voraussetzungen: Wenn s_n die n-te Partialsumme ist und s der Wert der Reihe ist, so gilt
>
> $$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Beweis: Wir können annehmen, daß die Reihe die Form $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n > 0$ besitzt. (Ggf. ein (-1) herausziehen aus der Summe, damit diese Form erreicht wird).

Wir betrachten zunächst die Teilfolge der Partialsummen

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \\ &= s_{2n-2} - \underbrace{a_{2n-1}}_{\geq a_{2n}} + a_{2n} \leq s_{2n-2}. \end{aligned}$$

Somit ist die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton fallend**. Andererseits ist diese Folge aufgrund der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **beschränkt**:

$$s_{2n} = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Somit konvergiert die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert s.

Nun ist noch zu zeigen, daß auch die Partialsummen mit ungeradem Index gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dies läuft analog:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \\ &= s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq a_{2n+1}} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1}. \end{aligned}$$

D.h. die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist **monoton wachsend**. Außerdem ist diese Folge nach oben beschränkt, da $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton fallend ist**:

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0.$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Somit konvergiert die Folge der Partialsummen, d.h. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

<u>Bemerkung:</u> Der Satz liefert keine Aussage über den konkreten Wert der Summe s.

Zur Abschätzung $|s - s_n|$: Falls n ungerade ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} s - s_n &= a_{n+1} \underbrace{-a_{n+2} + a_{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{-a_{n+4} + a_{n+5}}_{\leq 0} - \cdots \leq a_{n+1}, \\ s - s_n &= (\underbrace{a_{n+1} - a_{n+2}}_{\geq 0}) + (\underbrace{a_{n+3} - a_{n+4}}_{\geq 0}) + \cdots \geq 0. \end{aligned}$$

Falls n gerade ist, dann gilt analog:

$$\begin{aligned} s - s_n &= -a_{n+1} + (\underbrace{a_{n+2} - a_{n+3}}_{\geq 0}) + (\underbrace{a_{n+4} - a_{n+5}}_{\geq 0}) - \cdots \geq -a_{n+1}, \\ s - s_n &= \underbrace{-a_{n+1} + a_{n+2}}_{\leq 0} \underbrace{-a_{n+3} + a_{n+4}}_{\leq 0} - \cdots \leq 0. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$.

$\square$