# Folie zur Vorlesung “Mathematik A”
# 10. November 2011

## <u>Beispiele zur Partialbruchzerlegung:</u>

1. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung zu

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}.$$

**Lösung:** Ansatz:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Multiplikation mit dem gemeinsamen Hauptnenner $(x-1)^2(x+3)$ auf beiden Seiten ergibt

$$x^2+1 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2.$$

Verwendung der **Einsetzmethode** zur Bestimmung von $A$, $B$ und $C$:

$$\begin{aligned}
x=1: &\quad 2 = A\cdot 0\cdot 4 + B\cdot 4 + C\cdot 0 = 4B \quad\Longrightarrow\quad B=\frac{1}{2}\\
x=-3: &\quad 10 = A\cdot(-4)\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 16 = 16C\\
&\quad\Longrightarrow\quad C = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}\\
x=0: &\quad 1 = A\cdot(-1)\cdot 3 + B\cdot 3 + C\cdot 1 = -3A+3B+C = -3A+\frac{3}{2}+\frac{5}{8}\\
&\quad\Longrightarrow\quad A = \frac{1}{6}+\frac{5}{24} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Also:

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{\frac{3}{8}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{5}{8}}{x+3}.$$

2. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung zu
$$\frac{x^2+1}{(x^2+2x+2)(x-1)^2}.$$

**Lösung:** Ansatz:
$$\frac{x^2+1}{(x^2+2x+2)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$
Man beachte, daß $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 > 0$, d.h. $x^2+2x+2$ besitzt keine reellen Nullstellen! Multiplikation mit dem gemeinsamen Hauptnenner $(x^2+2x+2)(x-1)^2$ auf beiden Seiten ergibt
$$\begin{aligned} x^2+1 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+2x+2) + D(x^2+2x+2) \\ &= x^3 \cdot (A+C) + x^2 \cdot (B-2A-C+2C+D) + \\ &\qquad x \cdot (A-2B+2C-2C+2D) + (B-2C+2D) \\ &= x^3 \cdot (A+C) + x^2 \cdot (B-2A+C+D) + \\ &\qquad x \cdot (A-2B+2D) + (B-2C+2D) \end{aligned}$$
Durch **Koeffizientenvergleich** ergeben sich folgende Gleichungen:
$$\begin{array}{ll} x^3: & 0 = A+C \quad \Longrightarrow \quad A = -C \\ x^2: & 1 = -2A+B+C+D \\ x^1: & 0 = A-2B+2D \\ x^0: & 1 = B-2C+2D \end{array}$$
Einsetzen von $A=-C$ in die zweite und dritte Gleichung ergibt:
$$1 = B+3C+D, \quad 0 = 2D-2B-C.$$
Also ist

$B = 1-3C-D,$ und damit $0 = 2D-2+6C+2D-C = 5C+4D-2$,

also
$$D = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}C$$
und damit
$$B = 1-3C-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}C = \frac{1}{2}-\frac{7}{4}C.$$
Einsetzen in die Gleichung $1 = B-2C+2D$ ergibt
$$1 = \frac{1}{2}-\frac{7}{4}C-2C+1-\frac{5}{2}C = \frac{3}{2}-\frac{25}{4}C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{2}{25},$$
und damit $A = -\frac{2}{25}$, $B = \frac{9}{25}$ und $D = \frac{2}{5}$.

3. Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung zu

$$\frac{x^2+x}{(x^2+1)^2(x-1)^2}.$$

**Lösung:** Ansatz:

$$\frac{x^2+x}{(x^2+1)^2(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{(x-1)^2}.$$

Man beachte, daß $x^2+1$ keine reellen Nullstellen besitzt! Multiplikation mit dem gemeinsamen Hauptnenner $(x^2+1)^2(x-1)^2$ auf beiden Seiten ergibt

$$x^2+x = (Ax+B)(x^2+1)(x-1)^2+(Cx+D)(x-1)^2+E(x^2+1)^2(x-1)+F(x^2+1)^2.$$

Verwendung der **Einsetzmethode** zur Bestimmung von $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ und $F$:

$$x=1: \quad 2=4F \quad \Longrightarrow \quad F=\frac{1}{2},$$

$$x=i: \quad -1+i=(Ci+D)(i-1)^2=-2i(Ci+D)=2C-2iD$$

Vergleichen von Real- und Imaginärteile ergibt die Gleichungen

$$-1=2C,\ 1=-2D \quad \Longrightarrow \quad C=-\frac{1}{2}=D.$$

Weiteres Einsetzen:

$$\begin{aligned} x=0: &\quad 0=B+D-E+F=B-E \quad \Longrightarrow \quad E=B. \\ x=-1: &\quad 0=(-A+B)\cdot 8+0\cdot 4+E\cdot(-8)+\frac{1}{2}\cdot 4 \\ &\quad =-8A+8B-8B+2 \quad \Longrightarrow \quad A=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=2: \quad 6 &= \left(\frac{1}{2}+B\right)\cdot 5\cdot 1-\frac{3}{2}\cdot 1+E\cdot 25+\frac{1}{2}\cdot 25 \\ &= \frac{5}{2}+5B-\frac{3}{2}+25B+\frac{25}{2}=30B+\frac{27}{2} \quad \Longrightarrow \quad B=-\frac{1}{4}=E. \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{x^2+x}{(x^2+1)^2(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{(x^2+1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}.$$