Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
25. November 2011

Vektorräume:

Definition: Ein **Vektorraum** V ist eine nicht-leere Menge von Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, für welche eine Addition $\vec{a} + \vec{b}$ sowie eine Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \vec{a}$ mit reellen Zahlen λ definiert ist mit folgenden Eigenschaften:

1. Addition: Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$. Dann:
   (a) $\vec{a} + \vec{b} \in V$
   (b) Assoziativität: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
   (c) Kommutativität: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
   (d) Es gibt ein neutrales Element $\vec{0}$ (Nullvektor) mit
   $$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$
   (e) Es gibt zu jedem $\vec{a}$ ein inverses bzw. negatives Element $-\vec{a} \in V$ mit
   $$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}.$$
2. Skalarmultiplikation: Seien $\vec{a}, \vec{b} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Skalare). Dann:
   (a) $\lambda \cdot \vec{a} \in V$
   (b) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = (\lambda\vec{a}) + (\mu \cdot \vec{a})$
   (c) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) + (\lambda \cdot \vec{b})$
   (d) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
   (e) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ und $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.
2. Sei
   $$\mathcal{P}(x) = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$
   die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Dann ist $\mathcal{P}(x)$ ein Vektorraum, wobei die Polynome die Vektoren sind.
   - Die Addition zweier Polynome $p(x)$ und $q(x)$ ist gegeben durch $p(x) + q(x)$.
   - Die Skalatmultiplikation ist gegeben durch $\lambda p(x)$, d.h. $p(x)$ wird mit λ multipliziert.
   - Das negative Element zu $p(x)$ ist gegeben durch $-p(x)$.
   - Der Nullvektor ist das konstante Nullypolynom $p(x) = 0$.

Definition: Sei V ein Vektorraum. Eine nicht-leere Teilmenge U von V heißt **Unterraum/Untervektorraum**, falls gilt:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U: \quad \vec{u} + \vec{v} \in U$ (Abgeschlossenheit bzg. Addition)
2. $\forall \vec{u} \in U, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda \cdot \vec{u} \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation)

Beispiele:

1. V und $\{\vec{0}\}$ sind stets Unterräume von V.
2. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und
$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}.$$
Dann ist U ein Unterraum, denn:
   (a) U ist nicht-leer, denn $(0,0) \in U$, da $0 + 0 = 0$.
   (b) Abgeschlossenheit bzgl. Addition: Seien $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in U$, d.h. $x_1 + x_2 = 0$ und $y_1 + y_2 = 0$. Dann ist auch $\vec{x} + \vec{y} \in U$, denn
$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
und
$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0.$$
3. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und
$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}.$$
Dann ist U **kein** Unterraum, denn: $\vec{u} = (1,0) \in U$ wegen $1 + 0 = 0$, aber $2 \cdot \vec{u} \notin U$, denn:
$$2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (1,0) = (2,0) \quad \text{und} \quad 2 + 0 \neq 1.$$
4. Sei $V = \mathcal{P}(x)$ die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Sei $\mathcal{P}_n(x)$ die **Menge aller Polynome vom Grad kleiner gleich** n mit reellen Koeffizienten. Dann ist $\mathcal{P}_n(x)$ ein Unterraum von $\mathcal{P}(x)$, denn:
   (a) Addition zweier Polynome vom Grade kleiner gleich n ergibt wieder ein Polynom vom Grad kleiner gleich n.
   (b) Jedes Vielfaches eines Polynoms vom Grade kleiner gleich n ist wieder ein Polynom vom Grad kleiner gleich n.

Bemerkungen zur linearen (Un-)Abhängigkeit:

1. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängige Vektoren und

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k,$$

d.h. $\vec{x}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. Lasse sich z.B. $\vec{v}_1$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ darstellen (vgl. mit Satz im Skriptum), d.h. es existieren $\mu_2, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{v}_1 = \mu_2\vec{v}_2 + \mu_3\vec{v}_3 + \cdots + \mu_k\vec{v}_k.$$

Dann lässt sich auch $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, denn:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \\ &= \lambda_1 \cdot \big(\mu_2\vec{v}_2 + \mu_3\vec{v}_3 + \cdots + \mu_k\vec{v}_k\big) + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \\ &= (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2)\vec{v}_2 + (\lambda_1\mu_3 + \lambda_3)\vec{v}_3 + \cdots + (\lambda_1\mu_k + \lambda_k)\vec{v}_k. \end{aligned}$$

2. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Vektoren, die den Unterraum U aufspannen, d.h.

$$U = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle = \big\{\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\big\}.$$

Falls die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängig sind und lässt sich $\vec{v}_1$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ darstellen, so gilt sogar

$$U = \langle \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \rangle = \big\{\lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\big\}.$$

Also: Es läßt sich schrittweise die Anzahl der Vektoren, welche U aufspannen, reduzieren, bis alle verbleibenden Vektoren linear unabhängig sind.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^4$. Man betrachte die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Sei $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \rangle$. Da

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_4,$$

ist $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$. Da ferner

$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3$$

gilt sogar $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle$. Offensichtlich sind nun $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig, da $\vec{v}_1$ kein Vielfaches des Vektors $\vec{v}_3$ ist.