Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
01. Dezember 2011

Austauschsatz:

Satz: Sei die Menge $E = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ von linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{R}^n$ gegeben, die den Unterraum U aufspannen. Sei $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein weiterer Vektor aus U. Dann exisiert ein $\vec{v}_j \in E$, so daß die Vektoren

$$F = \{\vec{x}\} \cup E \setminus \{\vec{v}_j\}$$

denselben Unterraum U aufspannen und linear unabhängig sind.

Beweis: Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k \text{ mit } \lambda_1 \neq 0. \tag{1}$$

Sei $\vec{v} \in U$ gegeben, der sich etwa wie folgt als Linearkombination von Elementen von E darstellen lässt:

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{v}_1 + \cdots + \mu_k \vec{v}_k.$$

Zu zeigen ist nun, daß sich v auch als Linearkombination von Vektoren aus F darstellen lässt: dies ist der Fall, da

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\vec{x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{v}_k$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \mu_1 \vec{v}_1 + \cdots + \mu_k \vec{v}_k \\
&= \mu_1 \Big(\frac{1}{\lambda_1}\vec{x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{v}_k \Big) + \mu_2 \vec{v}_2 + \cdots + \mu_k \vec{v}_k \\
&= \frac{\mu_1}{\lambda_1}\vec{x} + \Big(-\mu_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \mu_2 \Big) \vec{v}_2 + \ldots \Big(-\mu_1 \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \mu_k \Big) \vec{v}_k.
\end{aligned}$$

Also erzeugt auch F den Unterraum U.

Es ist noch zu zeigen, daß die Vektoren in F linear unabhängig sind. Wir machen also den Ansatz

$$\sigma_1 \vec{x} + \sigma_2 \vec{v}_2 + \cdots + \sigma_k \vec{v}_k = \vec{0}.$$

Zu zeigen ist, daß $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k = 0$ die einzige Lösung ist. Wir setzen in diese Gleichung die Darstellung (1) ein:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \sigma_1 \vec{x} + \sigma_2 \vec{v}_2 + \cdots + \sigma_k \vec{v}_k \\
&= \sigma_1 \big(\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k \big) + \sigma_2 \vec{v}_2 + \ldots \sigma_k \vec{v}_k \\
&= \sigma_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + (\sigma_1 \lambda_2 + \sigma_2) \vec{v}_2 + \cdots + (\sigma_1 \lambda_k + \sigma_k) \vec{v}_k.
\end{aligned}$$

Da die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ linear unabhängig sind, muß gelten:

$$\lambda_1\sigma_1 = \sigma_1\lambda_2 + \sigma_2 = \cdots = \sigma_1\lambda_k + \sigma_k = 0.$$

Da $\lambda_1 \neq 0$ angenommen wurde, muß also $\sigma_1 = 0$ gelten und somit

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_k = 0.$$

Also sind die Vektoren in F linear unabhängig.

$\square$

Beispiel: Man betrachte dieselben Vektoren wie im Beispiel auf der letzten Folie. Dort gilt: U wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{v}_1$ und

$\vec{v}_3$ und es gilt $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_3$. Somit wird nach dem Austauschsatz der Unterraum U z.B. auch von den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannt.

Skalarprodukt:

Seien Vektoren $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n), \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann ist das **Skalarprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$** definiert als

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Beachte: Das Skalarprodukt ist nur definiert für Vektoren gleicher Länge!

Eigenschaften des Skalarprodukts:

- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist stets eine reelle Zahl.
- Symmetrie: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$.
  Denn:
  $$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$
- Linearität: Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
  1. $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
     Denn:
     $$\begin{aligned} \langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle &= \langle (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n), \vec{v} \rangle \\ &= \lambda u_1 v_1 + \cdots + \lambda u_n v_n \\ &= \lambda\big(u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n\big) = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$
  2. Ebenso: $\langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
  3. $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
     Denn:
     $$\begin{aligned} \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n), (w_1, \ldots, w_n) \rangle \\ &= (u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2 + \cdots + (u_n + v_n) w_n \\ &= u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 + \cdots + u_n w_n + v_n w_n \\ &= \underbrace{u_1 w_1 + u_2 w_2 + \cdots + u_n w_n}_{= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle} + \underbrace{v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n}_{= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle} \end{aligned}$$
  4. Ebenso: $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
- $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$, denn:
  $$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0.$$
  Insbesondere: Falls $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, dann muß $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ sein; außerdem $\langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0$. Daher ist das Skalarprodukt $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$ genau dann 0, wenn $\vec{u} = \vec{0}$.

Gleichungen und Ungleichungen:

Für alle Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle.$$

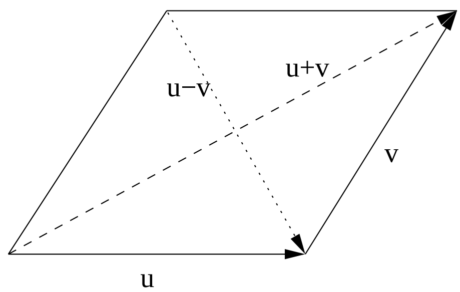
Beweis: Aufgrund der Linearität des Skalarprodukts gilt:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\langle +\vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\cdot\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2.
\end{aligned}$$

$\square$

Parallelogrammgleichung: Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\cdot\big(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\big)$$



Beweis: Aufgrund der Linearität des Skalarprodukts gilt:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{u}-\vec{v}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle + \\
&\quad +\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\
&= 2\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = 2\big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\big).
\end{aligned}$$

$\square$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$\big|\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\big| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Beweis: Falls $\vec{v} = \vec{0}$, so ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt, da $\langle \vec{u}, \vec{0}\rangle = 0$ und $\|\vec{0}\| = 0$.

Sei nun $\vec{v} \neq \vec{0}$ (d.h. $\|\vec{v}\| > 0$) und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt aufgrund der Linearität des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\vec{u} - \lambda\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} - \lambda\vec{v}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle + \langle -\lambda\vec{v}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle - \lambda\langle \vec{v}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - \lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle - \lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \lambda^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - 2\lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \lambda^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - 2\lambda\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \lambda^2\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle} + \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle} \\
&= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle} \\
&= \|\vec{u}\|^2 - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\|\vec{v}\|^2}.
\end{aligned}$$

Also:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2.$$

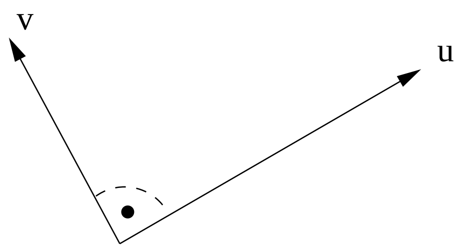
Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt nun die gewünschte Ungleichung.

□

Orthogonalität:

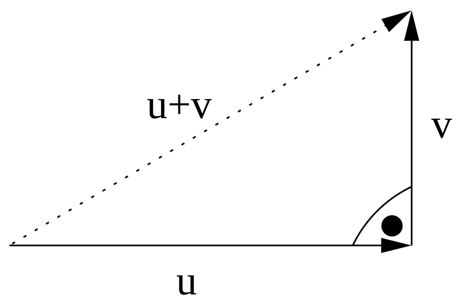
Definition: Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ stehen senkrecht aufeinander (sind **orthogonal** zueinander), falls

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$



1. Der Nullvektor $\vec{0}$ steht senkrecht auf jedem Vektor, da $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0$.
2. Wenn $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zueinander sind, so folgt daraus mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2.$$



Definition: Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ bilden ein **Orthogonalsystem**, falls

1. $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und
2. alle Vektoren paarweise orthogonal zueinander sind, d.h. falls $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$.

Beispiele:

1. Die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$$

   sind orthogonal zueinander.

2. Die Vektoren $(1, 3, 1)$ und $(1, 2, -7)$ sind orthogonal zueinander, da

$$\langle (1, 3, 1), (1, 2, -7) \rangle = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-7) = 0.$$

Bemerkung: Die Vektoren eines Orthogonalsystems sind linear unabhängig.

Definition: Wenn $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ den Unterraum U aufspannen, so bilden diese Vektoren eine **Orthogonalbasis**, falls

1. die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig sind und
2. die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ paarweise orthogonal sind.

Definition: Wenn $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ den Unterraum U aufspannen, so bilden diese Vektoren eine **Orthonormalbasis**, falls

1. die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig sind,
2. die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ paarweise orthogonal sind und
3. alle Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Länge 1 haben, d.h. $\|\vec{v}_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Beispiele:

1. Die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.
2. Die Vektoren $(2, 1, 1)$ und $(1, 2, -4)$ bilden eine Orthogonalbasis des von den beiden Vektoren aufgespannten Unterraums; sie bilden jedoch keine Orthonormalbasis, da beide Vektoren nicht Länge 1 besitzen. Durch Normieren (d.h. durch Teilen mit der Norm des jeweiligen Vektors) erhält man die folgende Orthonormalbasis desselbe Unterraums:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1) = \Big(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big), \quad \frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,-4) = \Big(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}\Big)$$