Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
02. Dezember 2011

Orthogonalprojektion auf einen Teilraum:

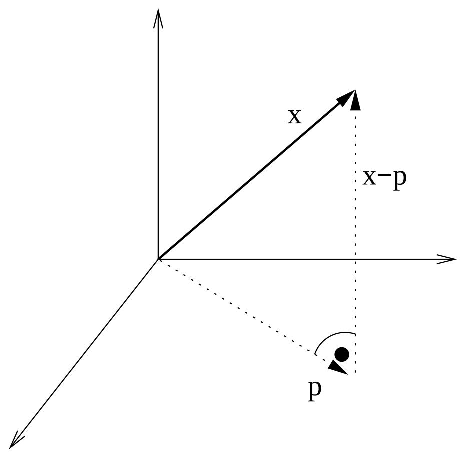
Sei $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ eine Orthonormalbasis eines Unterraums U von $\mathbb{R}^n$, und sei $\vec{x}$ ein beliebiger Vektor des $\mathbb{R}^n$.

Die **Projektion** von $\vec{x}$ auf den Unterraum U ist dann

$$\mathrm{Proj}_U(\vec{x}) = \vec{p} = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x}, \vec{x}_i \rangle \cdot \vec{x}_i,$$

d.h. der Vektor $\vec{x}$ wird zerlegt in

$$\vec{x} = \vec{p} + (\vec{x} - \vec{p}), \quad \text{wobei } \langle \vec{p}, \vec{x} - \vec{p} \rangle = 0.$$



Wir müssen also zeigen, daß $\vec{x} - \vec{p}$ senkrecht/orthogonal zu jedem $\vec{u} \in U$ ist, d.h. es ist zu zeigen: $\langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{u} \rangle$ für alle $\vec{u} \in U$.

Beweis: Jeder Vektor $\vec{u} \in U$ läßt sich als Linearkombination der $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_k$ darstellen, etwa

$$\vec{u} = \mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 + \cdots + \mu_k \vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{x}_j.$$

Mit Hilfe der Linearität des Skalarprodukts erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}-\vec{p},\vec{u}\rangle &= \langle \vec{x},\vec{u}\rangle - \langle \vec{p},\vec{u}\rangle \\
&= \left\langle \vec{x}, \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{x}_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x},\vec{x}_i\rangle \cdot \vec{x}_i, \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{x}_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu_j \langle \vec{x},\vec{x}_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x},\vec{x}_i\rangle \cdot \left\langle \vec{x}_i, \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vec{x}_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu_j \langle \vec{x},\vec{x}_j\rangle - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \langle \vec{x},\vec{x}_i\rangle \cdot \mu_j \cdot \underbrace{\langle \vec{x}_i,\vec{x}_j\rangle}_{=\begin{cases} 1, & \text{falls i=j} \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mu_j \langle \vec{x},\vec{x}_j\rangle - \sum_{j=1}^{k} \mu_j \langle \vec{x},\vec{x}_j\rangle = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel zum Gram-Schmidt-Verfahren:

Aufgabe: Man betrachte den Unterraum U des $\mathbb{R}^4$, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne eine Orthonormalbasis von U, und projeziere den folgenden Vektor $\vec{x} = (1, 0, -2, 1)$ auf U.

Lösung:

1.Schritt: Wir normalisieren $\vec{v}_1$ und erhalten dadurch $\vec{y}_1$:

$$\vec{y}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2}}\vec{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2.Schritt: Wir berechnen zunächst $\vec{w}_2$:

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{y}_1 \rangle \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2+2+0+0}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Den Vektor $\vec{y}_2$ erhalten wir durch Normierung von $\vec{w}_2$:

$$\vec{y}_2 = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|}\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2}}\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>3.Schritt:</u> Wir berechnen zunächst $\vec{w}_3$:

$$\begin{aligned}
\vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{y}_1 \rangle \vec{y}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{y}_2 \rangle \vec{y}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&\qquad - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-2+0+2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{-2-1-1+0}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Durch Normierung von $\vec{w}_3$ erhalten wir $\vec{y}_3$:

$$\vec{y}_3 = \frac{1}{\|\vec{w}_3\|} \vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{81} + \frac{49}{81} + \frac{1}{9} + \frac{49}{81}}} \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{7}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{123}} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Orthonormalbasis von U besteht also aus den drei Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$.

Projektion von $\vec{x}$ auf U:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_U(\vec{x}) &= \langle \vec{x}, \vec{y_1} \rangle \vec{y_1} + \langle \vec{x}, \vec{y_2} \rangle \vec{y_2} + \langle \vec{x}, \vec{y_3} \rangle \vec{y_3} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{123}} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{123}} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1+0+0+2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{-2+0+2+0}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{-4+0-6+7}{123} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{53}{123} \\ \frac{103}{123} \\ \frac{-3}{41} \\ \frac{61}{123} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

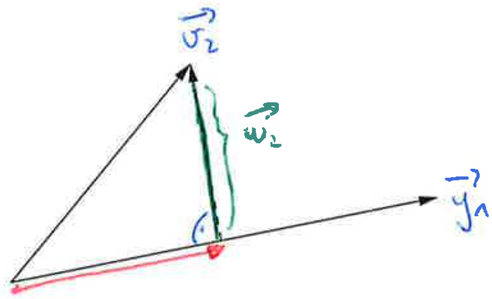
Zum Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren:

Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ gegeben, die den Unterraum U aufspannen. Dann berechnet sich eine Orthonormalbasis $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ zu U wie folgt:

$$\vec{y}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{y}_1 \rangle \vec{y}_1$$

Interpretation:

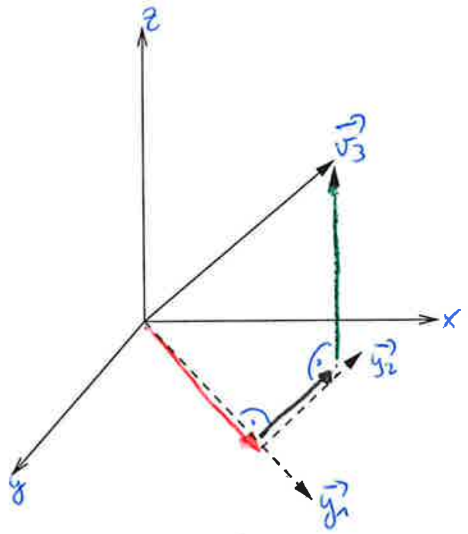


$$\vec{y}_2 = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|}\vec{w}_2.$$

Und:

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{y}_1 \rangle \vec{y}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{y}_2 \rangle \vec{y}_2.$$

Interpretation:



$$\vec{y}_3 = \frac{1}{\|\vec{w}_3\|}\vec{w}_3.$$

Zur Projektion auf einen Unterraum::

Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben, die eine **Orthonormalbasis** des von ihnen aufgespannten Unterraum U bilden. Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ein weiterer beliebiger Vektor. Dann ist die **Projektion** von $\vec{x}$ auf U gegeben durch:

$$\mathrm{Proj}_U(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \cdots + \langle \vec{x}, \vec{v}_k \rangle \vec{v}_k.$$

Mit anderen Worten: $\mathrm{Proj}_U(\vec{x})$ ist der eindeutig bestimmte Punkt $\vec{u} \in U$, so daß $\|\vec{x} - \mathrm{Proj}_U(\vec{x})\|$ minimal wird, d.h. $\mathrm{Proj}_U(\vec{x})$ ist der Punkt in U, welcher minimalen Abstand zu $\vec{x}$ besitzt.

Interpretation im Fall $k = 2$: Sei U eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Dann ist:

$$\mathrm{Proj}_U(\vec{x}) = \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1} + \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2}.$$