Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
13. Januar 2012

Weitere Beispiele zur Differenzierbarkeit:

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ **stetig**, da beide Teiläste stetig sind und an der Stelle 0 gilt:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} e^x = 1 = \lim_{x \to 0+} x^2 + x + 1 = \lim_{x \to 0+} f(x).$$

Außerdem ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ **differenzierbar**, da beide Teiläste differenzierbare Funktionen sind und an der Stelle 0 gilt:

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} e^x = 1 = \lim_{x \to 0+} 2x + 1 = \lim_{x \to 0+} f'(x).$$

2.

$$g(x) = e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x \geq 1 \\ e^{1-x} & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist $g(x)$ wieder eine auf ganz $\mathbb{R}$ **stetige** Funktion. Allerdings ist $g(x)$ an der Stelle 0 **nicht differenzierbar**, denn:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1+} g'(x) &= \lim_{x \to 1+} \left(e^{x-1}\right)' = \lim_{x \to 1+} e^{x-1} = e^0 = 1, \text{aber} \\ \lim_{x \to 1-} g'(x) &= \lim_{x \to 1-} \left(e^{1-x}\right)' = \lim_{x \to 1-} -e^{1-x} = -e^0 = -1. \end{aligned}$$

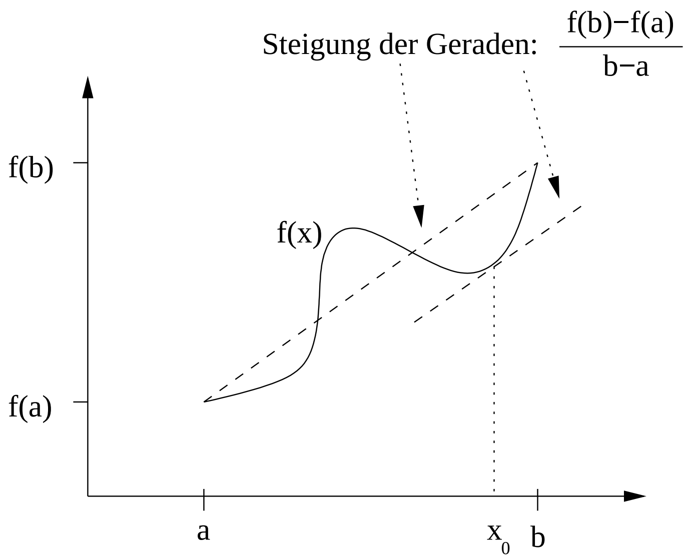
Also ist $\lim_{x \to 1+} g'(x) \neq \lim_{x \to 1-} g'(x)$, und somit ist $g(x)$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

<u>**1.Mittelwertsatz der Differentialrechnung:**</u>

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und differenzierbar in (a,b). Dann gibt es einen inneren Punkt $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

<u>Skizze:</u>



<u>Beweis:</u> Setze

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a), \\ g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a), \\ g'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

Somit ist der Satz von Rolle anwendbar, d.h. es existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $g'(x_0) = 0$. Also:

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Umformulierung des Satzes:

Setze $a = x$ und $b = x + h$. Dann lässt sich x_0 schreiben als $x_0 = x + \delta h$ für $0 < \delta < 1$ und somit

$$f'(x+\delta h) = f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

bzw. nach $f(x+h)$ aufgelöst:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+\delta h) \quad \text{für ein } \delta \in (0,1).$$

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz:

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und differenzierbar in (a,b). Dann gilt:

1. Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f eine **konstante** Funktion. Denn:

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot \underbrace{f'(a+\delta h)}_{=0} = f(a) \text{ für alle } h \in (0, b-a).$$

2. Gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, so ist $f(x) - g(x)$ **konstant**. Denn:

$$\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x) = f'(x) - f'(x) = 0,$$

und aufgrund der vorhergehenden Folgerung muß $f(x) - g(x)$ somit eine konstante Funktion sein.

3. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0 &\implies f(x) \text{ monoton wachsend} \\
\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0 &\implies f(x) \text{ strikt monoton wachsend} \\
\forall x \in (a,b) : f'(x) \leq 0 &\implies f(x) \text{ monoton fallend} \\
\forall x \in (a,b) : f'(x) < 0 &\implies f(x) \text{ strikt monoton fallend}
\end{aligned}$$

Denn: gelte $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und sei $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$. Wir schreiben x_2 als $x_2 = x_1 + h$ mit $h > 0$. Dann gilt:

$$f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + h \cdot \underbrace{f'(x_1 + \delta h)}_{\geq 0} \geq f(x_1).$$

Der Rest läßt sich analog beweisen.

2.Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Satz: Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und differenzierbar in (a, b). Ferner gelte für alle $x \in (a, b)$: $g'(x) \neq 0$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt einen inneren Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis: Setze

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big).$$

Wegen $g'(x) \neq 0$ kann $g(x)$ nicht konstant sein und muß strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend sein, d.h. es gilt $g(a) < g(b)$ bzw. $g(a) > g(b)$; in jedem Fall gilt $g(a) \neq g(b)$.

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(a) - g(a)\big) = f(a), \\
h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(b) - g(a)\big) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a), \\
h'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).
\end{aligned}$$

Somit ist der Satz von Rolle anwendbar, d.h. es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h'(x_0) = 0$. Also:

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) \implies \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$\square$