Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
20. Januar 2012

Taylorformel:

Satz:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion (d.h. alle Ableitungen bis zur Ordnung $n+1$ existieren und sind stetig). Sei $x_0 \in [a,b]$ und $h \in \mathbb{R}$ derart, daß $x_0 + h \in [a,b]$.
Dann gibt es ein $\delta \in (-1,1)$, so daß

$$f(x_0+h) = f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\delta h).$$

Beweis: Man definiere folgende Hilfsfunktion $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0+h) - f(x) - f'(x)(x_0+h-x) \\ &\quad -f''(x)\frac{(x_0+h-x)^2}{2!} - \dots - f^{(n)}(x)\frac{(x_0+h-x)^n}{n!} \\ &\quad -\alpha\frac{(x_0+h-x)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Es gilt $g(x_0+h) = 0$. Man wähle $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, so daß auch $g(x_0) = 0$. Somit können wir auf $g(x)$ den Satz von Rolle anwenden, d.h. im Fall $h > 0$ existiert ein $c \in (x_0, x_0+h)$ mit $g'(c) = 0$ bzw. im Fall $h < 0$ existiert ein $c \in (x_0+h, x_0)$ mit $g'(c) = 0$. In beiden Fällen können wir also c schreiben als $c = x_0 + \delta h$ mit $\delta \in (-1,1)$.

Wir berechnen nun die Ableitung von $g(x)$ an der Stelle $x = c = x_0 + \delta h$:

$$\begin{aligned} 0 = g'(c) &= -f'(c) - f''(c)(x_0+h-c) + f'(c) \\ &\quad -f'''(c)\frac{(x_0+h-c)^2}{2!} + f''(c)\frac{2\cdot(x_0+h-c)}{2!} \\ &\quad -f^{(4)}(c)\frac{(x_0+h-c)^3}{3!} + f'''(c)\frac{3\cdot(x_0+h-c)^2}{3!} - \dots - \\ &\quad -f^{(n+1)}(c)\frac{(x_0+h-c)^n}{n!} + f^{(n)}(c)\frac{n\cdot(x_0+h-c)^{n-1}}{n!} + \\ &\quad +\alpha\frac{(n+1)(x_0+h-c)^n}{(n+1)!} \\ &= -f^{(n+1)}(c)\frac{(x_0+h-c)^n}{n!} + \alpha\frac{(n+1)(x_0+h-c)^n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$f^{(n+1)}(c)\frac{(x_0+h-c)^n}{n!} = \alpha\frac{(n+1)(x_0+h-c)^n}{(n+1)!},$$

d.h.

$$f^{(n+1)}(c) = \alpha.$$

Wegen $g(x_0+h) = 0$ folgt somit

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0+h) - f(x) - f'(x)(x_0+h-x) - f''(x)\frac{(x_0+h-x)^2}{2!} - \cdots - \\ &\quad -f^{(n)}(x)\frac{(x_0+h-x)^n}{n!} - f^{(n+1)}(c)\frac{(x_0+h-x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

für passendes $c = x_0 + \delta h$ mit $\delta \in (-1, 1)$.

□

Ersetzt man in der Taylorformel $x = x_0 + h$ und somit $h = x - x_0$, so ergibt sich die äquivalente Formulierung:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(x_0 + \delta(x-x_0)\big) \end{aligned}$$

für ein passendes $\delta \in (-1, 1)$.

Im Spezialfall $x_0 = 0$ erhält man die sog. **MacLaurin'sche Formel**:

$$f(x) = f(0) + x\cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\delta x),$$

wobei $\delta \in (-1, 1)$.

Der jeweils letzte Term $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\delta h)$ bzw. $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(x_0+\delta(x-x_0)\big)$ bzw. $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\delta x)$ wird das $(n+1)$-ste **Restglied** $R_{n+1}(x)$ genannt.

Untersuchung von stationären Punkten:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar. Sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und sei ferner $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Einsetzen in die Taylorformel liefert

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + h \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{=0} + \frac{h^2}{2!} \underbrace{f''(x_0)}_{=0} + \cdots + \\ &\quad + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{f^{(n-1)}(x_0)}_{=0} + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \delta h) \\ &= f(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \delta h). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $f^{(n)}(x)$ stetig ist und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ist $f^{(n)}(x)$ in einer Umgebung von x_0 entweder positiv oder negativ, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $f^{(n)}(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ bzw. $f^{(n)}(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

1. Falls n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist $h^n \geq 0$ und $f^{(n)}(x_0 + \delta h) > 0$ für sehr nahe bei 0 liegendes h. Somit ist

   $$f(x_0 + h) \geq f(x_0) \text{ für nahe bei 0 liegendes } h.$$

   Also liegt bei x_0 ein **Minimum** vor!

2. Falls n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist $h^n \geq 0$ und $f^{(n)}(x_0 + \delta h) < 0$ für sehr nahe bei 0 liegendes h. Somit ist

   $$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \text{ für nahe bei 0 liegendes } h.$$

   Also liegt bei x_0 ein **Maximum** vor!

3. Falls $n \geq 3$ ungerade ist und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist für $|h|$ klein

   $$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \delta h) \begin{cases} > 0, & \text{falls } h > 0, \\ < 0, & \text{falls } h < 0, \end{cases}$$

   Also liegt bei x_0 ein **Wendepunkt** vor, da die Funktion in der Nähe von x_0 monoton wachsend ist und an der Stelle x_0 eine horizontale Tangente besitzt!

4. Falls $n \geq 3$ ungerade ist und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so ist

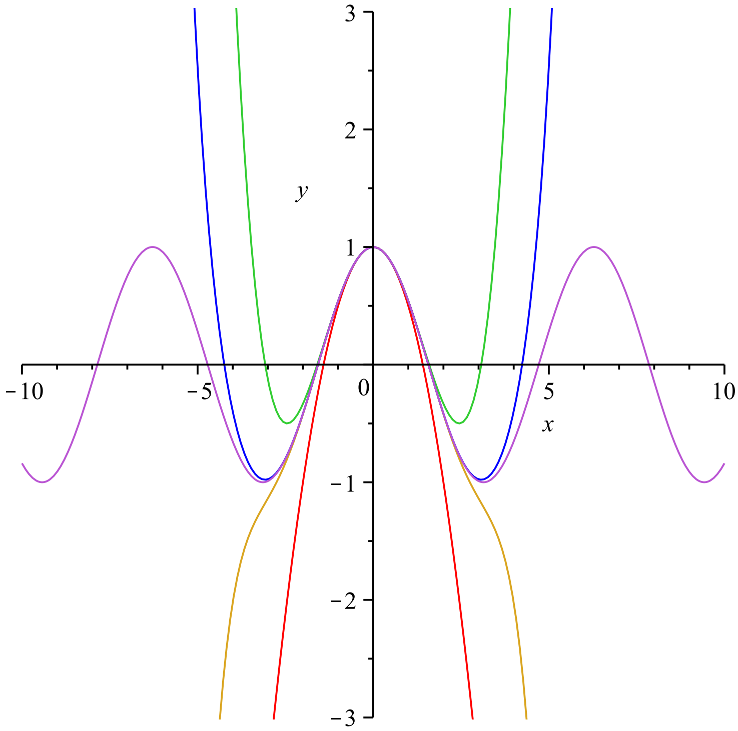
   $$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \delta h) \begin{cases} < 0, & \text{falls } h > 0, \\ > 0, & \text{falls } h < 0, \end{cases}$$

   Also liegt bei x_0 ein **Wendepunkt** vor, da die Funktion in der Nähe von x_0 monoton wachsend ist und an der Stelle x_0 eine horizontale Tangente besitzt!

Beispiel zur Taylorreihenentwicklung:

Man betrachte $f(x) = \cos(x)$. Die Taylorreihe ist gegeben durch

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots .$$

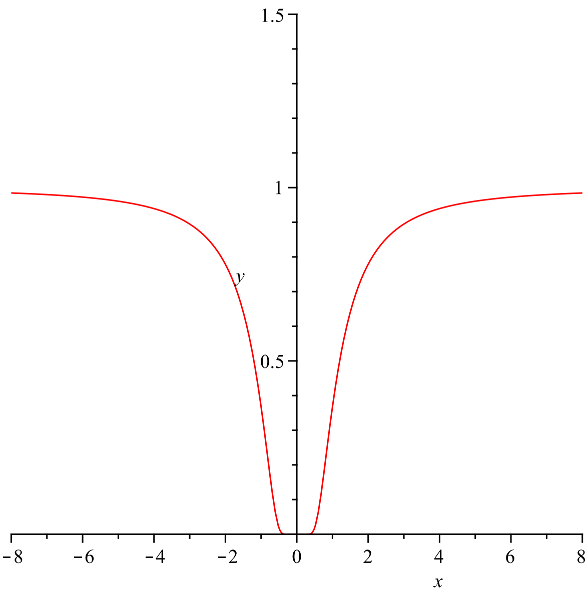


lila:	$\cos(x)$
rot:	$1 - \frac{x^2}{2}$
grün:	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$
gelb:	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$
blau:	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

<u>Weiteres Beispiel:</u>

Man betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$



<u>Behauptung 1:</u> Die k-te Ableitung von $f(x)$, $x \neq 0$, hat die Form $f^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x^2}$, wobei $P_k(y)$ ein Polynom mit $\deg P_k \leq 3k$ ist.

<u>Beweis:</u> Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach k:

Für $k = 1$ gilt:

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} = e^{-1/x^2} \cdot P_1(1/x),$$

wobei $P_1(y) = -2y^3$, also $\deg P_1(y) = 3$. Somit ist die Behauptung für $k = 1$ gezeigt.

Wir nehmen nun an, daß die Behauptung für $k-1$ gilt und wollen zeigen, daß sie auch für k gilt: sei also

$$f^{(k-1)}(x) = P_{k-1}(1/x)e^{-1/x^2} \quad \text{mit } \deg P_{k-1}(y) \leq 3(k-1).$$

Wir leiten nun $f^{(k-1)}(x)$ ab und erhalten

$$f^{(k)}(x) = P'_{k-1}(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot e^{-1/x^2} + P_{k-1}(1/x)e^{-1/x^2} \cdot \frac{-2}{x^3}.$$

Wenn wir $y = 1/x$ setzen ist also

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{P'_{k-1}(y) \cdot (-y^2)}_{\deg \leq 3k-3+2 \leq 3k} \cdot e^{-1/x^2} - \underbrace{2y^3 P_{k-1}(y)}_{\deg \leq 3k-3+3=3k} e^{-1/x^2} = P_k(1/x)e^{-1/x^2},$$

wobei $P_k(y)$ nun ein Polynom vom Grad kleiner gleich $3k$ ist. Somit wurde die Behauptung 1 für alle $k \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Behauptung 2: Die k-te Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ existiert und es gilt $f^{(k)}(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach k:

Für $k = 1$ gilt: setze $y = 1/x$:

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{-2}{x^3} = e^{-y^2} \cdot P_1(y),$$

wobei $P_1(y) = -2y^3$. Somit ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{y \to \infty} \frac{e^{-y^2} \cdot (-2y^3)}{1/y} = 0 = f'(0),$$

was durch iterierte Anwendung der de l'Hospital-Regel leicht folgt.

Wir nehmen nun an, daß die Behauptung für $k - 1$ gilt und wollen zeigen, daß sie auch für k gilt: sei also $f^{(k-1)}(0) = 0$ und setze erneut $y = 1/x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x - 0} = \lim_{y \to \infty} \frac{P_k(y) e^{-1/y^2}}{1/y} = 0 = f^{(k)}(0),$$

was wiederum durch iterierte Anwendung der de l'Hospital-Regel folgt. Somit wurde die Behauptung 2 für alle $k \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Taylorreihe zu $f(x)$ um $x_0 = 0$:

$$T_{f,0}(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \cdots = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.$$

Somit gilt hier: $T_{f,0}(x) \neq f(x)$.