Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
27. Januar 2012

Binomialreihe:

Man betrachte für $x \geq -1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = (1+x)^\alpha.$$

Gesucht ist eine Darstellung dieser Funktion als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Die ersten Ableitungen sind:

$$f'(x) = \alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ f''(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot(1+x)^{\alpha-3}, \ldots$$

und allgemein

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n}$$

Insbesondere ist also

$$f^{(n)}(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\cdot(1+0)^{\alpha-n} = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1).$$

<u>Einschub:</u> Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist der **allgemeine Binomialkoeffizient** definiert als

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Die Taylorreihe zur Funktion $f(x)$ ist also gegeben durch

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

<u>Konvergenzradius von $T_{f,0}(x)$:</u>

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1.$$

Somit ist der Konvergenzradius von $T_{f,0}(x)$ gleich 1.

Nun zeigen wir, daß $T_{f,0}(x) = f(x)$. Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned}
(1+x)T'_{f,0}(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} \\
&= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n} + n\binom{\alpha}{n}x^{n}\right] \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\alpha-n)\binom{\alpha}{n}x^{n} + n\binom{\alpha}{n}x^{n}\right] \\
&= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^{n} = \alpha\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^{n}\right) \\
&= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n} = \alpha\cdot T_{f,0}(x)
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$h(x) = \frac{T_{f,0}(x)}{(1+x)^{\alpha}}.$$

Die Ableitung von $h(x)$ ist dann

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{T'_{f,0}(x)(1+x)^{\alpha} - T_{f,0}(x)\cdot\alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\
&= \frac{T'_{f,0}(x)(1+x) - T_{f,0}(x)\cdot\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0.
\end{aligned}$$

Also ist $h(x)$ eine konstante Funktion und somit

$$h(x) = h(0) = \frac{T_{f,0}(0)}{(1+0)^{\alpha}} = T_{f,0}(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}0^{n} = \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Also gilt

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n} = (1+x)^{\alpha} \quad \text{für } |x| < 1.$$