Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

Prüfung aus Mathematik A für Elektrotechniker
14. 10. 2011
Stoffsemester: WS 2010/2011

---

1. Gegeben seien die Vektoren (10 Pkt.)

$$\vec{v_1} = (1,\ 2,\ 0,\ 2), \quad \vec{v_2} = (-2,\ 1,\ -1,\ 0), \quad \vec{v_3} = (1,\ -1,\ 1,\ 1).$$

   (a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis vom Untervektorraum U, der von den Vektoren $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ aufgespannt wird. Welche Dimension besitzt U?

   (b) Projezieren Sie den Vektor $(1,\ 0,\ -2,\ 1)$ jeweils auf den von $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ aufgespannten Untervektorraum, sowie auf U.

2. Gegeben sei die folgende Matrix mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$: (7 Pkt.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & \alpha & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Für welche Werte von α ist die Matrix A invertierbar?

   (b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = (0,\ 0,\ 1)^T$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. (a) Überprüfen Sie die gegebene Folge auf ihr Konvergenzverhalten: (4 Pkt.)

$$a_n = \sin\Big(\frac{\pi(n^2+1)}{4n^2}\Big) \cdot \arctan\big(n^3+1\big) + \frac{\ln(n^2+3)}{n+1}.$$

   (b) Überprüfen Sie folgende Reihe auf ihr Konvergenzverhalten: (4 Pkt.)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n \cdot n^2 \cdot \cos(3n)}{(n+1)!}.$$

4. Diskutieren Sie die Funktion (10 Pkt.)

$$f(x) = \frac{e^{2x-1}}{|x|}.$$

   Gefragt sind: *Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Differenzierbarkeit, lokale Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Konvexität, Randverhalten, Skizze.*

5. Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. <u>Begründen</u> Sie kurz Ihre Entscheidung! (5 Pkt.)

   (a) $\sqrt{2}$ ist Minimum der Menge $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x^2 \leq 3\}$.

   (b) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

   (c) Seien A, B reelle $n \times n$-Matrizen. Wenn das Matrizenprodukt $A \cdot B$ regulär ist, so sind beide Matrizen A und B regulär.

   (d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = f(1)$.

   (e) Sei $T_f(x)$ die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Dann gilt $T_f(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wo die Taylorreihe konvergiert.

Alle Zwischenschritte sind anzugeben!