Konversatorium "Mathematik A für Elektrotechniker"

WS 2011/2012

Institut für mathematische Strukturtheorie (Math. C)

10. Januar 2012

---

1. Gegeben sei die folgende Matrix mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Für welche Werte von α ist die Matrix A invertierbar? Ist 0 ein Eigenwert von A?

   (b) Bestimmen Sie (ohne explizites Ausrechnen einer Lösung) für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ jedes Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ beliebig, eindeutig lösbar ist.

2. Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben, welche den echt-komplexen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit dem Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ besitze. Zeigen Sie, daß dann auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A ist mit Eigenvektor $\overline{\vec{v}}$. (Hinweis: $\overline{\vec{v}}$ entsteht aus $\vec{v}$ durch komplexe Konjugation eines jedes Eintrags.)

3. Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume, sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 1 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$