Übungen "Mathematik B für Elektrotechniker"

SS 2011

Institut für mathematische Strukturtheorie (Math. C)

10. März 2011

---

1. Man betrachte die Funktion (je 2 Pkt.)
$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}.$$
Es soll die Fläche approximiert werden, welche vom Funktionsgraphen im Intervall $[1, 2]$ und der x-Achse eingeschlossen wird.
   (a) Berechnen Sie die Untersummen zu einer äquidistanten Zerlegung des Intervals $[1, 2]$ in $n = 3$ bzw. $n = 5$ Teilintervalle.
   (b) Berechnen Sie die Obersummen zu einer äquidistanten Zerlegung des Intervals $[1, 2]$ in $n = 3$ bzw. $n = 5$ Teilintervalle. Vergleichen Sie die erhaltenen Unter- und Obersummenwerte mit dem numerischen Ergebnis 8.86788.

2. Man betrachte die Funktion (je 2 Pkt.)
$$f(x) = \cos x + 1.$$
Es soll die Fläche approximiert werden, welche vom Funktionsgraphen im Intervall $[0, 6\pi]$ und der x-Achse eingeschlossen wird.
   (a) Berechnen Sie die Unter- und Obersummen zu einer äquidistanten Zerlegung des Intervals $[0, 6\pi]$ in $n = 2$ bzw. $n = 6$ Teilintervalle. Bewerten Sie das Ergebnis.
   (b) Wählen Sie eine geeignete Zerlegung des Intervalls $[0, 6\pi]$, um eine bessere Approximation (mit Hilfe von Ober- und Untersummen) der gesuchten Fläche zu erhalten.

3. Man betrachte folgende Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$: (3 Pkt.)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ 2, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ \pi, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Überprüfen Sie, ob das Supremum über alle Untersummen gleich oder echt kleiner dem Infimum aller Obersummen ist, d.h. überprüfen Sie, ob folgendes gilt:
$$\sup\{U(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [0, 1]\} = \inf\{O(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [0, 1]\}?$$

4. Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}e^{x^2/2}$ auf dem Intervall $[1, 2]$. Bestimmen Sie die Fläche, welche vom Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen wird, bis auf einen maximalen Fehler von 0.25. (Hinweis: Approximieren Sie die gesuchte Fläche durch Unter- und Obersummen mit Hilfe von äquidistanten Zerlegungen von $[1, 2]$, so dass die Differenz zwischen Ober- und Untersumme kleiner gleich 0.25 ist. Verwenden Sie dazu den Satz über montone Funktionen aus der Dienstag-Vorlesung.) (3 Pkt.)