Übungen "Mathematik B für Elektrotechniker"

SS 2011

Institut für mathematische Strukturtheorie (Math. C)

26. Mai 2011

Hinweis: Die Aufgabe 41 wird in denjenigen Übungsgruppen noch nachgeholt, in welchen sich die Besprechung in der letzten Übungsstunde zeitlich nicht mehr ausging. Diese Aufgabe ist nicht ankreuzbar, jedoch ist ein Vorrechnen mit Punktesammeln auf freiwilliger Basis möglich.

41. Gegeben sei die Funktion (4 Pkt.)
$$f(x,y) = (xy+1)(x+y).$$
Berechnen Sie alle stationären Punkte und bestimmen Sie deren Typen (Minimum, Maximum, Sattelpunkt). Ist $f(x,y)$ total differenzierbar?

42. Berechnen Sie die Extremwerte sowie deren Typen der Funktion (4 Pkt.)
$$f(x,y) = xy - 2y$$
unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$ durch Parametrisierung.

43. Berechnen Sie die Extremwerte sowie deren Typen der Funktion (4 Pkt.)
$$f(x,y) = x^2 y - 2y^2$$
unter der Nebenbedingung $x + y = 3$ mit Hilfe der Lagrange-Methode.

44. Berechnen Sie die Extremwerte sowie deren Typen der Funktion (4 Pkt.)
$$f(x,y,z) = xy - 2z$$
unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x + y - 2z = 1$ mit Hilfe der Lagrange-Methode.

Hinweis: Die erste Nebenbedingung stellt einen Zylinder dar, die zweite Nebenbedingung stellt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ dar. Beide Nebenbedingungen zusammen charakterisieren also die Schnittmenge eines Zylinders mit einer Ebene.

45. Berechnen Sie mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel die Jacobi-Matrix zu (3 Pkt.)
$$F(x_1,x_2) = g\big(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2), f_3(x_1,x_2)\big),$$
wobei
$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \\ f_3(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1^2 + 2x_2 \\ 3x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$
und
$$g(y_1,y_2,y_3) = \begin{pmatrix} g_1(y_1,y_2,y_3) \\ g_2(y_1,y_2,y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{y_2} - y_1 y_3 \\ 3y_1 - 4y_2 + y_3 \end{pmatrix}.$$

46. Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)$ sowie $\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)$ zu (3 Pkt.)
$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz^2 \\ x^2 y e^{xy+z} \\ x^3 - y^4 z^2 \end{pmatrix}$$
sowie $\triangle f(x,y,z)$ mit $f(x,y,z) = \cos(x^2 y + 2z)$.

47. Seien

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3), \quad \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, daß folgende Gleichungen gelten:

(a) (2 Pkt.)

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{rot} \vec{v}(x_1, x_2, x_3)\big) = 0.$$

(b) (2 Pkt.)

$$\operatorname{div}\big(f(x_1, x_2, x_3) \cdot \vec{v}(x_1, x_2, x_3)\big) = \langle \nabla f(x_1, x_2, x_3), \vec{v}(x_1, x_2, x_3) \rangle + f(x_1, x_2, x_3) \cdot \operatorname{div}\big(\vec{v}(x_1, x_2, x_3)\big)$$

48. Berechnen Sie das Volumen des Körpers im $\mathbb{R}^3$, welcher die Grundfläche $[1, 3] \times [2, 5]$ besitzt und dessen obere Deckfläche gegeben ist durch $f(x, y) = xy^2 + e^{x+y}$. (2 Pkt.)

49. Berechnen Sie (2 Pkt.)

$$\int_D \cos(x) \sin(y) + z \, d\vec{x} \qquad \text{mit } D = [0, \pi/2] \times [\pi/4, \pi/2] \times [1, 2], \ \vec{x} = (x, y, z).$$