# Errata Analysis T1 Skriptum

- S. 12, Beispiel 7 (2006-11-06):

  Induktionsbasis: $n = 1 \quad 1 = \frac{1-q}{1-q}$.

- S. 29, Definition 3.5.7 (2006-11-06):

  Eine Folge, die (3.21) erfüllt, heißt *Cauchy-Folge*; diese Eigenschaft heißt *Cauchy'sche Eigenschaft*.

- S. 32 oben (2006-11-06):

  Wenn eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, gibt es nach Satz 3.5.3 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $x = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$.

- S. 34, zweiter Absatz (2006-11-06):

  Um zu beweisen, dass $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ gilt, müssen wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N$ finden, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|1/n| = 1/n < \varepsilon$. Letzteres ist äquivalent zu $1/\varepsilon < n$. Und das ist wiederum äquivalent zu $n > \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir daher $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$.

- S. 35, Formel in Seitenmitte (2006-11-06):

$$\begin{aligned}\Big| x_{n+1} - x_n \Big| &= \left| \frac{1+x_n}{2+x_n} - \frac{1+x_{n-1}}{2+x_{n-1}} \right| = \left| \frac{(2+x_{n-1})(1+x_n) - (1+x_{n-1})(2+x_n)}{(2+x_{n-1})\cdot(2+x_n)} \right| \\ &\leq \left| \frac{2 + 2\cdot x_n + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n-1} - 2 - x_n - 2\cdot x_{n-1} - x_n \cdot x_{n-1}}{2\cdot 2} \right| \\ &= \frac{|x_n - x_{n-1}|}{4}\end{aligned}$$

- S. 37, Induktionsschritt im ersten Viertel der Seite (2006-11-06):

$$x_n > x_{n+1} \qquad \Rightarrow \qquad x_n + 2 > x_{n+1} + 2$$

- S. 43, erste Hälfte (2006-11-06):

  Behauptung:

$$\prod_{l=1}^{n}(1+x_l) \geq 1 + \sum_{l=1}^{n} x_l \quad \text{wenn } \forall l : -1 \leq x_l \leq 0 \quad \text{oder } \forall l : x_l \geq 0 \tag{3.27}$$

  Daraus ergibt sich

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{n} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k-1} l = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}.$$

Daher gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{1}{2n}\sum_{l=0}^{n-2}\frac{1}{l!} \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \frac{e}{2n}.$$

- S. 45 (2006-11-06):

  **Satz 3.7.4 (Majorantenkriterium).** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern und es gelte $\forall n : 0 \leq b_n \leq a_n$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

  *Beweis.* Weil $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern ist, genügt es die Beschränktheit der Partialsummen nachzuweisen.

  $$\sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k =: M$$

  Die Folge der Partialsummen ist beschränkt, die Glieder der Reihe sind positiv, d. h. die Reihe ist konvergent. □

- S. 46 (2006-11-15): letzte Zeile:

  $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k\cdot\sqrt{2^k}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^k}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \qquad q<1 \quad \text{die Reihe konvergiert.}$$

- S. 48 (2006-11-06):

  **Bemerkung 19.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

  $$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

- S. 51 Seitenmitte (2006-11-06):

  $$\limsup_{n\to\infty}\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} < 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N : \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \leq r \text{ für ein } r < 1.$$
  $$\Rightarrow |b_{n+1}| \leq r\cdot|b_n| \leq r^2\cdot|b_{n-1}| \leq \dots \leq r^{n-N+1}\cdot b_N$$

- S. 55, dritte Formelzeile (2006-11-07):

  $$\Rightarrow \exp(x)\cdot\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

- S. 57, vorletzte Formelzeile (2006-11-07):

$$|z_n - (1+i)| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right) + i\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 - i\right| = \left|\frac{1}{n} - i\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

- S. 62, letztes Drittel (2006-11-14):

  Wenn $f$ surjektiv ist, dann hat der Graph folgende Eigenschaft:
  Jede horizontale Gerade schneidet den Graphen in mindestens einem Punkt.

- S. 65 (2006-11-14):

  **Bemerkung 36.** Sei $f : I_1 \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0$ und $g : I_2 \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0) \in I_2$ und sei $f(I_1) \subseteq I_2$, dann ist $g \circ f : I_1 \to \mathbb{R}$ in $x_0$ stetig.

- S. 67, unteres Drittel (2006-11-15):

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^5 + 7x_n^4 + 3x_n^3 - 2x_n^2 + x_n - 3) = {x_0}^5 + 7{x_0}^4 + 3{x_0}^3 - 2{x_0}^2 + x_0 - 3$$

- S. 71 (2006-11-22):
  - oberes Drittel: $\cos(x) \leq 1$, $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} > 0$
  - Mitte, Definiton 4.1.7: $\frac{\pi}{2} = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \cos(x) = 0\}$
  - letztes Drittel: $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$
  - ganz unten: $\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x).$

- S. 73, unteres Drittel (2006-11-22):

  $(r, \varphi), r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in (-\pi, \pi]$ beschreiben alle Punkte der Ebene mit Ausnahme des Ursprungs. Für den Ursprung muss $r = 0$ sein und $\varphi$ beliebig.

- S. 79, unten (2006-11-27):

  **Definition 4.2.3.**

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsinh}: \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \end{aligned}$$

  heißt *Areasinus hyperbolicus.*

- S. 80 unten (2006-11-27):

  Der Tangens hyperbolicus nimmt nur Werte aus $(-1, 1)$ an.

- S. 80 (2006-11-27): letzte drei Zeilen löschen.

- S. 81 (2006-11-06; 2006-11-27):

**Definition 4.3.1.** Sei $I$ ein Intervall und $x_0 \in I$ und $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Dann schreiben wir $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, wenn:

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y_0| < \varepsilon$ oder
- Für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ und $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n$ gilt: $y_0 = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$

Diese beiden Definitionen sind äquivalent. Der Beweis ist der gleiche wie der für das $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium.

- S. 81, letzte Zeile (2006-12-01):

  $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 1$ und $0 \neq 1$, daher existiert $\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht!

- S. 82, Definition 4.3.2 (2006-12-01):

$$y_0 = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x),$$

und

$$y_1 = \lim_{x \to b-0} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \uparrow b} f(x),$$

- S. 82 (2006-12-01)

  **Definition 4.3.3.** Sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann schreiben wir $y_0 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, wenn $\forall \varepsilon > 0 : \exists M : \forall x > M : |f(x) - y_0| < \varepsilon$.

  „$+\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x)$“, wenn $\forall M > 0 \exists N : \forall x > N : f(x) > M$

  Sei $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Dann schreiben wir

  „$+\infty = \lim_{x \to x_0} f(x)$“, wenn $\forall M > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

  „$-\infty = \lim_{x \to x_0} f(x)$“$\Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in I \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

- S. 83, oben (2006-12-01):

  Momentangeschwindigkeit:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t},$$

- S. 88, Mitte (2006-12-01):

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-1} =$$
$$a_1 + (x - x_0) \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-2} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$$

- S. 91, Mitte (2006-12-06):

  Sei $\delta > 0$ so, dass $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$ (und wegen $|\xi - x_0| < |x - x_0| < \delta$) $\Rightarrow |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A| = |\frac{f(x)}{g(x)} - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

- S. 93, Beispiel 63 (2006-12-06):

$$\lim_{x \to 0+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{-\frac{1}{(\ln(x))^2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{-\frac{1}{\ln(x)^2}} =$$

... führt zu keinem Ergebnis.

- S. 95, dritte Zeile (2006-12-06):

$$R_n(f, x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

- S. 96, letztes Drittel (2006-12-16):

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_k(f, x_k, x_0)$$

- S. 100, Bemerkung 70 (2006-12-16):

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(l-1)}(x_0)}{(l-3)!}(x - x_0)^{l-3} + \frac{f^{(l)}(x_0)}{(l-2)!}(x - x_0)^{l-2} + R \\ &= 0 + \frac{f^{(l)}(x_0)}{(l-2)!}(x - x_0)^{l-2} + R \end{aligned}$$

- S. 101, Beispiel 69 (2006-12-06):

$$f'' = \frac{(-2x+4)(x^2+x+2)^2 - 2(-x^2+4x+4)(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x+2)^4} = \frac{2x^3 - 12x^2 - 24x}{(x^2+x+2)^3}$$

$\vdots$

$\Rightarrow N_f = \{0, -2\}$

## Errata Analysis T1 — Sonstige Materialien

- Konvergenzkriterien für Reihen (2006-11-15): **Verdichtungssatz.**

  Falls $a_n$ monoton fallend, so konvergiert $\sum_n a_n$ genau dann, wenn $\sum_n 2^n a_{2^n}$ konvergiert.