Differentiationsregeln

Seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann gilt:

1. Linearität (1): $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2. Linearität (2): $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ für konstantes $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. Produktregel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Quotientenregel:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2},$$
falls $g(x_0) \neq 0$.
5. Kettenregel: Falls $h : f(I) \to \mathbb{R}$ und h in $f(x_0)$ differenzierbar:
$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$
6. Umkehrfunktion: Sei f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton. Dann gilt für $y_0 = f(x_0)$
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ableitungen elementarer Funktionen

1. Für reelles konstantes α: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2. $\exp'(x) = \exp(x)$
3. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
4. $a \in \mathbb{R}^+$: $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
5. $\sin'(x) = \cos(x)$
6. $\cos'(x) = -\sin(x)$
7. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
8. $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1+\cot^2(x))$
9. $\cosh'(x) = \sinh(x)$
10. $\sinh'(x) = \cosh(x)$
11. $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$
12. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
15. $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
17. $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
18. $\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
19. $\operatorname{Arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$