Konvergenzkriterien für Reihen mit nichtnegativen Gliedern

Seien $a_n,\ b_n \geq 0$.

- $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert genau für $\alpha > 1$.
- Majorantenkriterium.
  Falls $a_n \leq b_n$ und $\sum_n b_n$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_n a_n$.
- Minorantenkriterium.
  Falls $a_n \leq b_n$ und $\sum_n a_n$ divergiert, so divergiert auch $\sum_n b_n$.
- Verdichtungssatz.
  Falls a_n monoton fallend, so konvergiert $\sum_n a_n$ genau dann, wenn $\sum_n 2^n a_{2^n}$ konvergiert.
- Grenzwertkriterium.
  $\sum_n a_n$ konv. und $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty \Rightarrow \sum_n b_n$ konvergent.
  $\sum_n a_n$ div. und $\liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0 \Rightarrow \sum_n b_n$ divergent.
  Wenn $\ell := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert und $0 < \ell < \infty$, so haben $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ dasselbe Konvergenzverhalten.

Konvergenzkriterien für Reihen mit beliebigen Gliedern

- Notwendiges Konvergenzkriterium.
  Falls $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so divergiert $\sum_n a_n$.
- Wurzelkriterium.
  Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert $\sum_n a_n$.
  Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert $\sum_n a_n$.
- Quotientenkriterium.
  Falls $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, so konvergiert $\sum_n a_n$.
  Falls $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so divergiert $\sum_n a_n$.
- Leibniz-Kriterium.
  Falls a_n monoton fallende Nullfolge ist, so konvergiert $\sum_n (-1)^n a_n$.
- Absolute Konvergenz.
  Falls $\sum_n |a_n|$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_n a_n$.