

1. Kommissar  $K$  hat 3 Tatverdächtige:  $P$ ,  $Q$  und  $R$ . Er weiß:

- (a) Wenn sich  $Q$  oder  $R$  als Täter herausstellen, dann ist  $P$  unschuldig.
- (b) Ist aber  $P$  oder  $R$  unschuldig, dann muss  $Q$  ein Täter sein.
- (c) Ist  $R$  schuldig, so ist  $P$  Mittäter.

Wer ist Täter?

2. Es sei  $p$  die Aussage „Sie ist alt“ und  $q$  die Aussage „Sie ist weise“. Schreiben Sie in symbolischer Form

- (a) Sie ist alt und weise.
- (b) Sie ist weder alt noch weise.
- (c) Es stimmt nicht, daß sie jung oder weise ist.
- (d) Wenn sie alt ist, ist sie weise.

3. Stellen Sie die Wahrheitstabellen für folgende Ausdrücke auf.

- (a)  $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ .
- (b)  $(a \vee \neg b) \rightarrow ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$ .

4. Bringen Sie  $((q \vee \neg q) \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \wedge q)$  auf

- (a) konjunktive
- (b) disjunktive

Normalform.

5. Es seien  $M_1, M_2$  beliebige Mengen. Man beweise die „Absorptionsgesetze“:

$$M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1 \quad , \quad M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$$

6. Man zeige für beliebige endliche Teilmengen  $A$  und  $B$  einer Menge  $R$ :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Man leite daraus eine entsprechende Formel für  $|A \cup B \cup C|$  her. (Mit  $|M|$  wird die Anzahl der Elemente von  $M$  bezeichnet).

7. Man beweise für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k = \frac{1}{4} (1 + (-1)^{n-1} (2n + 1))$$

8. Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig? Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis und zu falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

- (a)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ ,
- (b)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$ ,
- (c)  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ ,
- (d)  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ .

9. Lösen Sie folgende Ungleichungen über den reellen Zahlen.

(a)  $\frac{x-3}{1-2x} < 0$ ,

(b)  $3 - x^2 + 2x > 0$ ,

(c)  $\frac{x}{x-2} > \frac{x-3}{3x-1}$ .

*Anmerkung:* Es sollen tatsächlich die *Ungleichungen* direkt gelöst werden, d.h., es sollen nicht die entsprechenden Gleichungen gelöst und einzelne „Probe“-Punkte eingesetzt werden.

10. Man beweise für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

11. Für positive Zahlen  $a, b$  definiert man das *arithmetische*, *geometrische* und *harmonische Mittel* durch

$$A(a, b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a, b) := \sqrt{ab}, \quad H(a, b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}$$

Man beweise:

$$H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$$

und zeige, dass die Gleichheit der Mittel nur für  $a = b$  eintritt.

12. Man zeige:  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ , falls  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

13. Es seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positive Zahlen. Man beweise:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

14. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a)  $\frac{(n+1)(n^2-1)}{(2n+1)(3n^2+1)},$

(b)  $\frac{(n+1)(n^3-1)}{(2n+1)(3n^2+1)}.$

15. Bestimmen Sie den Grenzwert  $a$  der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , und geben Sie ein  $N \in \mathbb{N}$  an, so dass  $|a_n - a| < 10^{-3}$  für  $n > N$  gilt. Dabei ist  $a_n =$

(a)  $\frac{6n-2}{3n+7},$

(b)  $\frac{1}{4^n},$

(c)  $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}.$

16. Sind die folgenden Folgen konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a)  $\frac{\sqrt{9n^2+10}}{12n+1},$

(b)  $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^n,$

(c)  $\frac{n}{3^n},$

(d)  $\frac{n^2}{4^n},$

(e)  $\cos(n\pi),$

(f)  $\sin(n\pi),$

(g)  $\frac{17}{n} + \frac{2^n}{n!},$

(h)  $2 + \frac{\cos n\pi}{n^5+11},$

(i)  $\frac{(-5)^n + 3^n}{(-5)^{n+1} + 3^{n+1}},$

(j)  $\sqrt[3]{1-n^3} + n,$

(k)  $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}.$

17. Man bestimme die Häufungspunkte folgender Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Geben Sie zu jedem Häufungspunkt eine gegen ihn konvergente Teilfolge von  $x_n$  an.

(a)  $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$

(b)  $x_n = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$

18. Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen  $(x_n)$  auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

(a)  $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$  für  $n \geq 0$  und  $x_0 = 0$ .

(b)  $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$  für  $n \geq 0$  und  $x_0 = 0$ .

19. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

20. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$ ,

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{n^4+1}$ .

21. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2},$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{3^n}.$$

22. Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 4^n}$$

konvergiert. Achten Sie darauf, dass Sie tatsächlich für *alle*  $x \in \mathbb{R}$  eine Aussage treffen und nicht etwa einen oder zwei Werte von  $x$  „vergessen“.

23. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

24. Lösen Sie folgende Gleichungen über den komplexen Zahlen. Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil der Lösung an.

(a)  $\frac{(1 + 2i)z + 9}{(3 + 4i)z - (9 + 4i)} = 8 - 5i,$

(b)  $z^2 = 3 - 4i,$

(c)  $z^2 - 7z + (13 - i) = 0,$

(d)  $z^6 = 1.$

25. Bestimmen Sie sämtliche Häufungspunkte der komplexen Folge

$$a_n = \frac{1}{3^{n/2}} \cos n\pi + i \cdot (-1)^n \frac{n+2}{n-3}.$$

Ist die Folge konvergent?

26. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto x^2 + 11$ . Ist  $f$  injektiv? Ist  $f$  surjektiv? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}$  an, sodass  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv ist. Geben Sie weiters gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge  $B \subseteq \mathbb{R}$  an, sodass  $f : \mathbb{R} \rightarrow B$  surjektiv ist.

27. Bestimmen Sie die größte Menge  $D$ , sodass

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 5}$$

eine Funktion ist. Bestimmen Sie weiters das Bild  $f(D)$ . Ist die Funktion injektiv?

28. Für welche Wahl von  $a, b \in \mathbb{R}$  ist die folgende Funktion stetig?

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{falls } x \leq 1 \\ ax - x^3 & \text{falls } 1 < x \leq 2 \\ bx^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

29. Zeigen Sie, dass für reelle  $s$  und  $t$  die folgenden Identitäten gelten:

(a)  $\sin s - \sin t = 2 \cos \frac{s+t}{2} \sin \frac{s-t}{2}$

(b)  $\sin(2s) = 2 \sin s \cos s$

(c)  $\cos(2s) = 2 \cos^2 s - 1$

30. Drücken Sie  $\cos(3s)$  nur durch  $\cos s$  aus (so wie in Beispiel 29c  $\cos(2s)$  nur durch  $\cos s$  ausgedrückt wurde).

31. Benutzen Sie Beispiele 29 und 30, um  $\cos(\pi/6)$ ,  $\cos(\pi/4)$  und  $\cos(\pi/3)$  sowie  $\sin(\pi/6)$ ,  $\sin(\pi/4)$  und  $\sin(\pi/3)$  zu bestimmen.

32. Man berechne die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

(a)  $\frac{ax+b}{cx+d}$

(b)  $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

(c)  $\ln \frac{ax+b}{cx+d}$

Dabei sind  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  die 3., 5., 6. und 7. Stelle Ihrer Matrikelnummer.

33. Man berechne die Ableitungen der folgenden Ausdrücke:

(a)  $\sqrt{1+e^x} \ln(x + \cos^2(\frac{1}{x^2}))$

(b)  $2^{x^2 \cos x}$

(c)  $x^x$

(d)  $(x^x)^x$

(e)  $x^{x^x}$

(f)  $\text{Arcosh } \sqrt{x}$

34. Beweisen Sie, dass

(a)  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

(b)  $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Hier dürfen nur die Differentiationsregeln und die Regeln 1.–6. auf der Liste der Ableitungen elementarer Funktionen verwendet werden.

35. Man berechne die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$ ,

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$ ,

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ ,

(d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right)$ .

36. (a) Man bestimme das 2-te Taylorpolynom  $T_2(f, x, 1)$  von  $f(x) = x \ln x$  um den Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ .
- (b) Man schätze das 2-te Restglied  $R_2(f, x, 1)$  derselben Funktion für  $|x - 1| < 1/10$  ab.
37. Diskutieren Sie die Funktion  $f(x) = x^2 \sqrt{25 - x^2}$ .
- (a) Definitionsbereich, Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Nullstellen
- (b) Extremwerte (Achtung!) inkl. Typ, Monotonieintervalle
- (c) Wendepunkte und Krümmungsverhalten.
38. Bestimmen Sie das 5-te Taylorpolynom  $T_5(f, x, 0)$  von  $f(x) = \sqrt[3]{27 - 9x^3}$ .
39. Man beweise für  $1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  die Ungleichung  $e^x < \frac{e}{1+x-x^2}$ .

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie die angegebene Methode verwenden:

40. Summenregel

$$\int \left( x^3 + \frac{2}{x} + e^{2x} - \sinh x \right) dx$$

41. logarithmische Regel

$$\int \tanh \alpha x dx$$

42. partielle Integration

$$\int x^2 e^{-x^3} dx$$

43. zweimalige partielle Integration führt auf eine Gleichung für die Stammfunktion

$$\int e^x \sin 2x dx$$

44.  $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$  und Substitutionsregel

$$\int (\sin x + \sin^3 x) dx$$

45. partielle Integration wie bei der Bestimmung der Stammfunktion des Logarithmus

$$\int \arctan x dx$$

46. partielle Integration

$$\int x^2 \ln x dx$$

47. Substitution  $x = \tan t$

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

48. Substitution  $e^x = t$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

49. Führen Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktion durch:

$$\frac{5x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 10x - 2}{x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x + 4}$$

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

50.

$$\int \frac{dx}{1+x^3}$$

51.

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2+x+1} dx$$

52.

$$\int \frac{3x^3-9x^2-3x-46}{x^4+13x^2+36} dx$$

53.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$$

54.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

55.

$$\int x\sqrt{1+x} dx$$

56.

$$\int \frac{1}{1+\sin x} dx$$

57.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-2-9x^2}}$$

58.

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

59.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 1 + x\sqrt{x^2 + 1}}$$

60.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}$$

61.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x(1 + \sqrt{1-x^2})}$$

62.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( x\sqrt{1+2x} - x(x+1) \right) dx$$

63. Berechnen Sie die Bogenlänge der durch

$$y = \cosh(x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

gegebenen Kurve.

64. Die durch

$$y = \cosh(x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

gegebene Kurve rotiert um die  $x$ -Achse. Bestimmen Sie die Oberfläche der entstehenden Fläche.

65. Bestimmen Sie Oberfläche und Volumen der Einheitskugel.