9. Lösen Sie folgende Ungleichungen über den reellen Zahlen.

   (a) $\frac{x-3}{1-2x} < 0$,

   (b) $3 - x^2 + 2x > 0$,

   (c) $\frac{x}{x-2} > \frac{x-3}{3x-1}$.

   Anmerkung: Es sollen tatsächlich die *Un*gleichungen direkt gelöst werden, d.h., es sollen nicht die entsprechenden Gleichungen gelöst und einzelne „Probe“-Punkte eingesetzt werden.

10. Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

11. Für positive Zahlen a, b definiert man das *arithmetische, geometrische* und *harmonische Mittel* durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) := \sqrt{ab}, \quad H(a,b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}$$

   Man beweise:

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$$

   und zeige, dass die Gleichheit der Mittel nur für $a = b$ eintritt.

12. Man zeige: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, falls $x > 0$, $y > 0$.

13. Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Man beweise:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$