19.10.2009

Kapitel 1. Vektorräume und lineare Unabhängigkeit

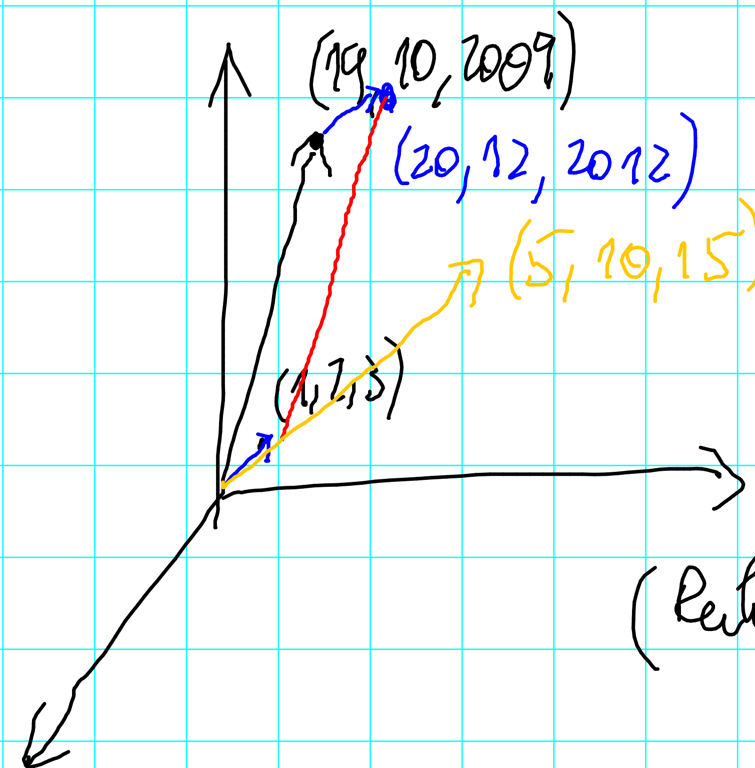
1.1 Vektorräume

Zur Einstimmung ein paar Beispiele.

Bsp 1. $\mathbb{R}^3 = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$

geometrische Interpretation: Punkte im Raum

Addition von „Punkten“ $(19, 10, 2009) + (1, 2, 3) = (20, 12, 2012)$



Parallelogramm.

Addieren von Punkten entspricht Translation (Verschiebung) eines Punkts um den anderen (Reihenfolge ist egal).

Multiplikation mit Skalar (= Zahl) Streckung auf das Fünffache.

$5 \cdot (1, 2, 3) = (5, 10, 15)$

$(-3)\cdot(1,2,3)=(-3,-6,-9)$ Streckung + Umorientierung.

<u>Beispiel 2</u> $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

z.B. $(1,1,-2)$, $(0,0,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)\in E$

geometrische Interpretation: Ebene.

Behauptung:

$$E=\{\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

(durch Festlegung der ersten beiden Komponenten ist die dritte Komponente bereits festgelegt, weil

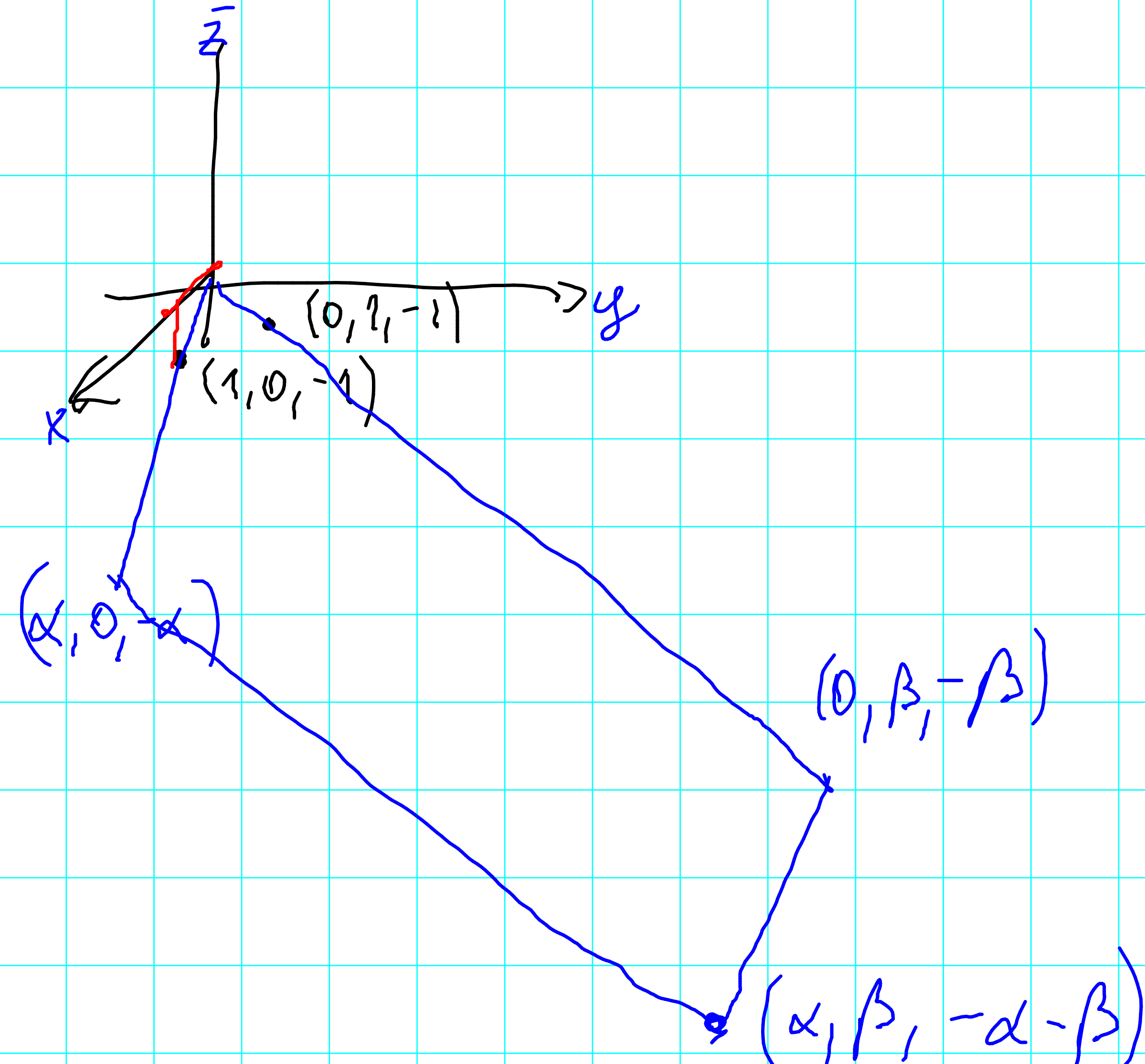
$$z=-x-y$$

Wähle $x=\alpha$ beliebig, $y=\beta$ auch beliebig,

$$z=-\alpha-\beta$$

und daher

$$(x,y,z)=(\alpha,\beta,-\alpha-\beta)=(\alpha,0,-\alpha)+(0,\beta,-\beta)=$$
$$=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)\quad)$$



Ebene durch Ursprung.

(geometrisch wurden x, y im Grundriss gewählt, z ergibt sich.)

Wenn $(x, y, z) \in E$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, so ist auch $\gamma \cdot (x, y, z) \in E$.

Wenn $(x_1, y_1, z_1) \in E$ und $(x_2, y_2, z_2) \in E$, dann gilt auch $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in E$.

Beispiel 3. $\mathbb{R}^4 = \{(x,y,z,t) \mid x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$,

z.B. (x,y,z) Raum t Zeit

formal funktionieren alle Operationen (Addition, Multiplikation mit Skalar) weiterhin.

Beispiel 4 Eine Folge: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ (Fibonacci-Folge)

Noch eine Folge. $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \ldots$ (Lucas-Folge)

$3, 7, 10, 17, 27, 44, \ldots$ (Felix-Folge)

$1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}, \ldots$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}$$

$1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{5}, \ldots$

$$F = \{(a_n) \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für alle } n \geq 0\}.$$
$$a_n \in \mathbb{R}$$

Multiplikation einer solchen Folge mit Skalar ergibt wieder Element von F.

Wenn $(a_n) \in F$ und $(b_n) \in F$, dann auch

$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n) \in F$

„Dimension"

1	5 Stimmen
2	7 Stimmen
n	viele
∞	6 Stimmen
$n+2$	4
Stimmenthaltung	7

Durch Angabe von 2 Werten ist Folge eindeutig bestimmt.

Beispiel 5. $C^1[0,1] = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid$ f ist auf $(0,1)$ stetig differenzierbar$\}$

auch die Summe zweier Funktionen $\in C^1[0,1]$ ist wieder Element von $C^1[0,1]$, auch das Produkt einer solchen Funktion mit einer Konstanten.

Summen von Funktionen differenziert man, indem man ihre Ableitungen addiert

<u>Plan</u>. Wir bauen eine Theorie, die auf den Begriffen „Addieren“ und „Multiplizieren mit einer Zahl“ aufbaut und (hoffentlich) interessante Ergebnisse bringt, z.B. Klärung des Begriffs Dimension.

<u>Definition</u>. Ein Körper ist eine Menge K (mit mindestens zwei Elementen) mit zwei inneren Verknüpfungen $+: K\times K \longrightarrow K$ und $\cdot : K\times K \longrightarrow K$, wobei wir die Verknüpfungen für $a, b \in K$ als $a+b$ bzw. ab schreiben, sodass die folgenden Rechenregeln gelten:

Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$(K,+)$ bildet abelsche Gruppe

$a+(b+c) = (a+b)+c$	(Assoziativgesetz)	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
$a+b = b+a$	(Kommutativgesetz)	$a\cdot b = b\cdot a$

Es gibt Elemente 0 und 1, sodass für alle $a \in K$ gilt:

$a+0 = a$	(neutrale Elemente)	$a\cdot 1 = a$

Für jedes $a\in K$ gibt es ein Element $-a$, sodass

$a+(-a) = 0$	(inverses Element bzgl $+$)

Für jedes $a \in K \setminus \{0\}$ gibt es ein Element a^{-1}, sodass
$a \cdot a^{-1} = 1$

Weiters gelte für alle $a, b, c \in K$, ~~das~~, dass
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributivgesetz

Beispiele und Gegenbsp.

$\mathbb{Z}$: nein, kein Inverses bzgl. Multipl.
$\mathbb{R}$: ja
$\mathbb{Q}$: ja
$\mathbb{C}$: ja (wenn man mit ihnen umgehen kann)

„kleine Beispiele" $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

...... sehr schöne Anwendungen

20.10.2009

Definition (Vektorraum)

Sei V eine Menge, K ein Körper, $+ : V \times V \to V$
eine innere Verknüpfung und $\cdot : K \times V \to V$
eine weitere Verknüpfung.
Dann heißt V ein K-Vektorraum, wenn
folgende Rechenregeln gelten:

$(V,+)$ bildet abelsche Gruppe

Für alle $u, v, w \in V$ gelte

$$u + (v+w) = (u+v) + w \qquad \text{Assoziativgesetz}$$

$$v+w = w+v \qquad \text{Kommutativgesetz}$$

Es gebe ein $0_V \in V$, sodass für alle $v \in V$

$$0_V + v = v.$$

Für jedes $v \in V$ gebe es ein $(-v) \in V$, sodass

$$v + (-v) = 0_V.$$

Weiters gelte für alle $\alpha, \beta \in K$ und $v, w \in V$, dass

Körperoperationen

VR-Operationen

$$(V_1) \quad \alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \alpha w$$

$$(V_2) \quad (\alpha+\beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$$

$$(V_3) \quad (\alpha \cdot \beta)\, v = \alpha\, (\beta v)$$

$$(V_4) \quad 1_K \cdot v = v$$

(1_K ist das Eins-Element aus dem Körper).

Bemerkungen zu Notation. Es gibt verschiedene Philosophien zur Kennzeichnung von Vektoren:

- keine explizite Kennzeichnung
- Vektorpfeile auf jeden Vektor $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \vec{v} + \alpha \vec{w}$
- Fettdruck für Vektoren $\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}$

$$\alpha \mathbb{v} + \beta \mathbb{w}$$

Beispiele für Vektorräume (hoffentlich alle Bsp am Anfang dieses Abschnitts).

Bsp 6. Sei K ein Körper mit $+$ und $\cdot$. Dann ist K mit denselben Operationen ein K-Vektorraum, weil die Gesetze für Körper offensichtlich auch die Gesetze für Multiplikation mit Skalaren beinhalten.

Wir beweisen hier nicht, dass $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_2$ Körper sind, sondern hoffen, dass das wer anderer macht. Sehr wohl beweisen wir, dass dann die Bsp 1–4 Vektorräume sind, wenn auch nicht alles sofort.

Satz 1.1. Sei V ein K-Vektorraum und M eine beliebige Menge. Wir setzen $W = \{ f : M \to V \mid f \text{ ist eine Funktion} \}$ und definieren auf W zwei Operationen:

$+ : W \times W \to W$; $f + g$ wird durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ definiert für alle $x \in M$.

$\cdot : K \times W \to W$; $\alpha \cdot f$ wird durch $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ für $x \in M$ definiert.

Dann ist W ein K-Vektorraum.

Vor dem Beweis: Was hat das mit den Bsp zu tun?

Bsp 1. $\mathbb{R}^3$. $\quad$ $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum (lt Bsp 6) $\quad V = \mathbb{R}$

$M = \{1,2,3\}$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ entspricht Funktion $f: \{1,2,3\} \to \mathbb{R}$ mit

$$1 \mapsto x$$
$$2 \mapsto y$$
$$3 \mapsto z$$

~~für~~ die Operationen passen genau zusammen!

Bsp 3. $\mathbb{R}^4$ $\quad$ ganz gleich.

Bsp 4 $\quad$ das mag ich jetzt noch nicht behandeln, aber als Aufzählung:

$$W = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Folge mit Werten in } \mathbb{R} \}$$

Eine Folge können wir wieder als Funktion von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sehen.

Addition passt wieder zusammen.

Bsp 5 $\quad$ das ~~mag~~ darf ich überhaupt nicht machen, aber dort sind die Funktionen schon unversteckt gestanden

Beweis Satz 1.1. Wir müssen Gesetze nachrechnen: z.B.

$$(f+(g+h))(x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) =$$
$$= (f(x)+g(x))+h(x) = (f+g)(x)+h(x) =$$
$$= ((f+g)+h)(x)$$

alle 7 anderen Gesetze ganz gleich $\longrightarrow$ Privatvergnügen. $\square$

22.10.2009

Korollar 1. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, dann ist
$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$
ein K-Vektorraum mit komponentenweisen Operationen

Korollar 2. Sei K ein Körper, und
$$K^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \text{Folge mit } a_n \in K\}.$$
Das ist mit komponentenweisen Operationen ein K-Vektorraum.

Proposition (Rechenregeln für Vektorräume) Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt

1) Für alle $v \in V$ gilt $0_K \cdot v = 0_V$
2) Für alle $\alpha \in K$ gilt $\alpha \cdot 0_V = 0_V$.
3) Wenn für ein $\alpha \in K$ und ein $v \in V$ gilt, dass $\alpha \cdot v = 0_V$, dann folgt $\alpha = 0_K$ oder $v = 0_V$
4) Für alle $v \in V$ gilt $(-1_K) \cdot v = -v$

(0_K ... 0 im Körper; 0_V ... 0 im Vektorraum, 1_K ... 1 im Körper, $-v$ ist additives Inverses von v im Vektorraum).

<u>Beweis</u>. 1) Es gilt

$$0_K \cdot v + 0_K v \overset{V_2}{=} (0_K + 0_K) \cdot v \underset{\text{Körper}}{=} 0_K v$$

Addiere auf beiden Seiten $-(0_K v)$

$$0_K v + \underbrace{\left(0_K v + (-(0_K v))\right)}_{0_V} \overset{\text{Assoz}}{=} \underbrace{0_K v + (-(0_K v))}_{0_V}$$

$$\underbrace{0_K v + 0_V} = 0_V$$

$$0_K v = 0_V$$

2) $$\alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V \overset{V_1}{=} \alpha (0_V + 0_V) \underset{\text{Vektor}}{=} \alpha\, 0_V$$

Wie unter 1) folgt daraus $\alpha\, 0_V = 0_V$.

3) Es gelte $\alpha \cdot v = 0_V$. Falls $\alpha = 0_K$, so sind wir fertig. Also jetzt können wir $\alpha \neq 0_K$ annehmen. Daher gibt es α^{-1},

$$0_V \overset{2)}{=} \alpha^{-1} 0_V = \alpha^{-1} \cdot (\alpha v) \overset{V_3}{=} (\alpha^{-1} \alpha) v = 1_K v \overset{V_4}{=} v$$ ✓

4) $$(-1_K) \cdot v + v \overset{V_4}{=} (-1_K) v + 1_K v \overset{V_2}{=} (-1_K + 1_K) v \overset{\text{Körper}}{=} 0_K \cdot v \overset{1)}{=} 0_V$$

Addiere $-v$ auf beiden Seiten

$$(-1_K) v + \underbrace{(v + (-v))}_{0} = -v + 0_V = -v$$ $\square$