1.2. Untervektorräume

Definition Sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ mit $W \neq \emptyset$.
Wenn
UVR1) $\forall\, u, w \in W: \quad u + w \in W$ (d.h. W ist bzgl. Addition abgeschlossen)
UVR2) $\forall\, w \in W\ \forall \alpha \in K: \quad \alpha \cdot w \in W$ (d.h. W ist bzgl. Mult. mit Skalar abgeschlossen),
so heißt W ein Untervektorraum von V. Man schreibt $W \leq V$.
(Die Operationen waren die Operationen aus V).

Satz 1.2. Sei V ein K-Vektorraum und $W \leq V$.
Dann ist W (mit den auf W eingeschränkten Operationen von V) ein K-Vektorraum.

Beweis. Assoz. der Add.
Komm. } geerbt. $+$ ist auf W eine innere Verknüpfung (UVR1).

0_V ist spannender: ist es in W?
Sei $w \in W$. Dann gilt $0_V \overset{\text{Rechenregeln in } V}{=} \underbrace{0_K}_{\in K} \cdot \underbrace{w}_{\in W} \overset{\text{UVR2}}{\in} W$

und verhält sich wie gewohnt.

Sei $w \in W$. Frage: gilt $-w \in W$?

Lt Rechenregel 4 in V gilt   UVR2

$$-w = \underbrace{(-1_K)}_{\in K} \cdot \underbrace{w}_{\in W} \in W.$$

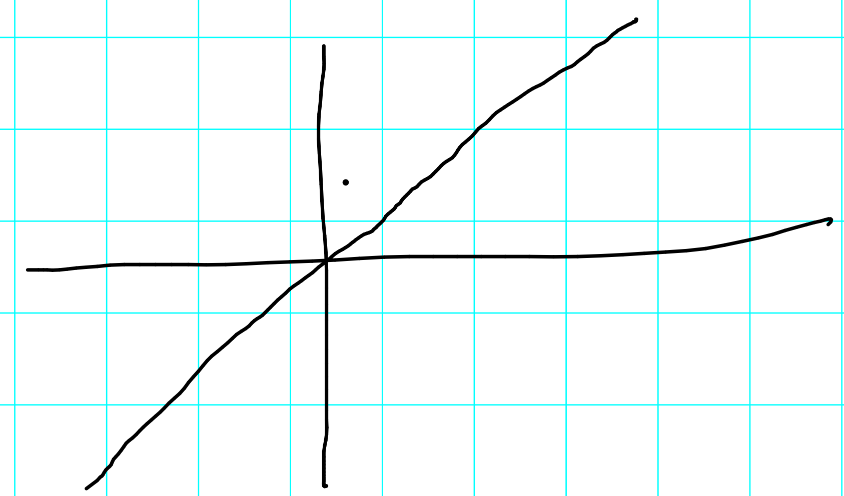
$w + (-w) = 0_V$ geerbt.

$V_1 - V_4$ geerbt. $\square$

<u>Beispiele</u>. • Bsp 2 von ganz am Anfang. (UVR-Axiome wurden unwissentlich (?) behandelt)

• beliebige Gerade im $\mathbb{R}^2$ durch den Ursprung.

$$g = \{t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{für ein } v \neq 0 \in \mathbb{R}^2$$



Geraden, die nicht durch Ursprung gehen, sind keine UVR (0 fehlt ...)

• Ebenen durch Ursprung im $\mathbb{R}^3$

Proposition. Sei V ein K-Vektorraum, $\emptyset \neq W \subseteq V$. 27.10.2009
Dann ist W genau dann ein Untervektorraum von V, wenn
$\forall v, w \in W \ \forall \alpha \in K: \quad v + \alpha w \in W$

Beweis „$\Rightarrow$" Seien $v, w \in W$ und $\alpha \in K$. Lt. UVR2 gilt $\alpha w \in W$.
Dann folgt aus UVR1

$$\underbrace{v}_{\in W} + \underbrace{(\alpha w)}_{\in W} \in W$$

„$\Leftarrow$" Zeige UVR1. Seien also $v, w \in W$. Dann gilt

$$v + w = v + 1_K w \in W$$

Zeige UVR2. Seien also $w \in W$ und $\alpha \in K$. Dann gilt

$$\alpha w = 0_V + \alpha w$$

Wenn wir wüssten, dass $0_V \in W$, dann wären wir fertig.
Wähle $u \in W$ beliebig. (das ist möglich, weil $W \neq \emptyset$)
Dann gilt

$$\underbrace{0_V = u + (-u) = \underbrace{u}_{\in W} + \underbrace{(-1)}_{\in K}\underbrace{u}_{\in W}}_{\text{Rechenregeln in } V} \in W \qquad \square$$