1.3 Algebren

(27.10.2009)

Definition: Sei V ein K-Vektorraum, auf dem zusätzlich eine innere Verknüpfung $\cdot : V \times V \to V$ definiert ist, sodass für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha \in K$ gilt, dass

$$\left.\begin{aligned} u \cdot (v+w) &= uv + uw \\ (u+v) \cdot w &= uw + vw \end{aligned}\right\} \text{ Distributivgesetze}$$

$$\alpha (u \cdot v) = (\alpha u) \cdot v = u (\alpha v),$$

dann heißt V eine K-Algebra.

Wenn $\forall u, v, w \in V$: $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$, so heißt V eine assoziative K-Algebra.

Wenn $\forall u, v \in V$: $u \cdot v = v \cdot u$, so heißt V eine kommutative K-Algebra.

Wenn es ein $I \in V$ gibt, sodass für alle $v \in V$: $I \cdot v = v$, so heißt V eine unitäre K-Algebra.

Wir werden v.a. drei wichtige Beispiele erleben.

1.3.1. Komplexe Zahlen

Wir definieren auf $\mathbb{R}^2 = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ eine innere Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$K = \mathbb{R}$

durch

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ bc+ad)$$

Wir rechnen nach, dass die Gesetze gelten:

$$(c,d)\cdot(a,b) = (ca-db,\ da+cb) = (ac-bd,\ \underbrace{\cancel{ad+bc}}_{bc+ad}) = (a,b)\cdot(c,d)$$

kommutativ.

$$(a,b)\cdot\big((c,d)+(e,f)\big) = (a,b)\cdot(c+e,\ d+f) =$$
$$= \big(a(c+e)-b(d+f),\ b(c+e)+a(d+f)\big) =$$
$$= (ac-bd+ae-bf,\ bc+ad+be+af) =$$
$$= (ac-bd,\ bc+ad) + (ae-bf,\ be+af)$$
$$= (a,b)\cdot(c,d) + (a,b)\cdot(e,f)$$

distributiv.

Sei $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\alpha\cdot\big((a,b)\cdot(c,d)\big) = \alpha\cdot(ac-bd,\ bc+ad) = \big(\alpha(ac-bd),\ \alpha(bc+ad)\big) =$$
$$= (\alpha ac-\alpha bd,\ \alpha bc+\alpha ad)$$

$$\big(\alpha\cdot(a,b)\big)\cdot(c,d) = (\alpha a,\ \alpha b)\cdot(c,d) = (\alpha ac-\alpha bd,\ \alpha bc+\alpha ad)$$

$\mathbb{R}^2$ ist damit schon eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra.

$$(a,b)\cdot\big((c,d)\cdot(e,f)\big) = (a,b)\cdot(ce-df,\ de+cf) =$$
$$= \big(a(ce-df)-b(de+cf),\ b(ce-df)+a(de+cf)\big) =$$
$$= (ace-adf-bde-bcf,\ bce-bdf+ade+acf)\ ||$$

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (ac-bd,\ bc+ad)\cdot(e,f) =$$
$$= ((ac-bd)e-(bc+ad)f,\ (bc+ad)e+(ac-bd)f) =$$
$$= (ace-bde-bcf-adf,\ bce+ade+acf-bdf)$$

$\mathbb{R}^2$ ist damit schon eine assoziative kommutative $\mathbb{R}$-Algebra.

Wir suchen jetzt ein $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, sodass

$$(x,y)\cdot(a,b) = (a,b) \qquad \text{für alle } (a,b) \text{ gilt.}$$

$$\Rightarrow \quad (ax-yb,\ ya+xb) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} ax-yb &= a \quad &|\cdot a\\ bx+ya &= b \quad &|\cdot b \end{aligned} \Big\}+$$

$$\Rightarrow \quad a^2x+b^2x = a^2+b^2$$
$$\Leftrightarrow \quad (a^2+b^2)x = a^2+b^2$$

$x=1$ funktioniert jedenfalls.

in 1. Glg. $\quad a-yb=a \Rightarrow yb=0 \quad y=0$ schaut gut aus.

$\Rightarrow (x,y)=(1,0) \qquad$ Probe $(a\cdot 1-0\cdot b,\ 0\cdot a+1\cdot b)=(a,b)$ ✓

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ ist mit unseren Operationen eine unitäre, assoziative, kommutative $\mathbb{R}$-Algebra.

Wir behaupten, dass das in Wahrheit ein Körper

bzgl. + abelsche Gruppe erledigt (VR)

bzgl $\cdot$ assoz, komm, neutr erledigt (siehe oben

$\longrightarrow$ es fehlt: inverses Element bzgl. Multipl.

Distributivgesetze erledigt (Algebra)

Suche inverses Element zu $(a,b)\neq(0,0)$ bzgl Multipl. durch Ansatz (x,y).

$$(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$$
$$(ax-by,\ bx+ay)=(1,0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} ax-by=1 & \mid \cdot a \\ bx+ay=0 & \mid \cdot b \end{array}\right\}+$$

$$a^2x+b^2x=a$$
$$x(a^2+b^2)=a \qquad \Big|:(a^2+b^2)\neq 0 \quad \text{wegen } (a,b)\neq(0,0)$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{a}{a^2+b^2}$$

y aus 2ter Gleichung:
$$ay=-bx$$
$$y=-\frac{b}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}}{a^2+b^2}=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

bei $a=0$ Problem.

bei $a=0$: $\quad -by=1 \qquad bx=0 \quad \Rightarrow x=0,\quad y=-\frac{1}{b}=\frac{-b}{a^2+b^2}$

Jedenfalls: $(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ ✓

Mit dieser Multiplikation bildet $\mathbb{R}^2$ einen Körper.

Beobachtung. Für „beliebiges" $x \in \mathbb{R}$ verhält sich x wie $(x,0)$:

$$x(a,b) = (xa, xb)$$

$$(x,0)(a,b) = (xa - 0\cdot b,\ 0\cdot a + xb) = (xa, xb)$$

$$x+y \qquad (x,0)+(y,0) = (x+y, 0)$$

Die reellen Zahlen „finden sich wieder".

Definiere $i := (0,1)$. Jetzt schreibe

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + b\cdot(0,1) = a + bi$$

Zur Unterhaltung berechne i^2.

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1$$

Definition $\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}$ mit $i = (0,1)$ und a entspricht $(a,0)$ heißt die Menge der komplexen Zahlen.

Schreibe die Verknüpfungen in neue Schreibweise um:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i.$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(bc+ad)i$$

brutale Ausrechnung:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac+bic+adi+bdi^2 =$$
$$= ac+bci+adi+bd(-1) =$$
$$= (ac-bd)+(bc+ad)\,i$$

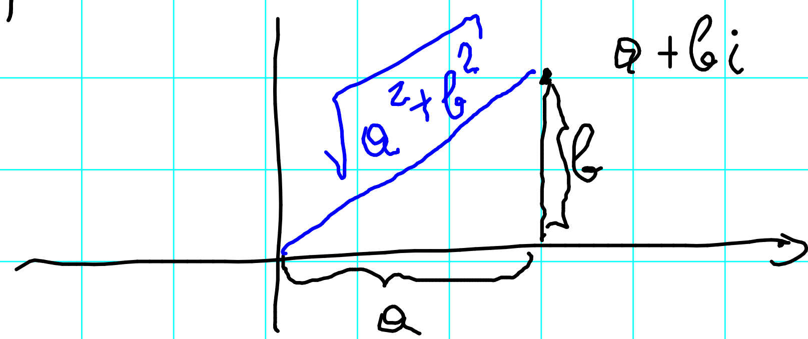
passt zusammen.

neutr. El. bzgl $+$: 0

neutr El bzgl $\cdot$: 1

Satz 1.3 $\mathbb{C}$ bildet mit den angegebenen einen Körper.

Geometrische Interpretation. als Punkte in der Ebene „Gaußsche Zahlenebene"



$a+bi \mathrel{\hat{=}} (a,b)$

Definition. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = a+bi$. Dann setze

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$ „Betrag von z"

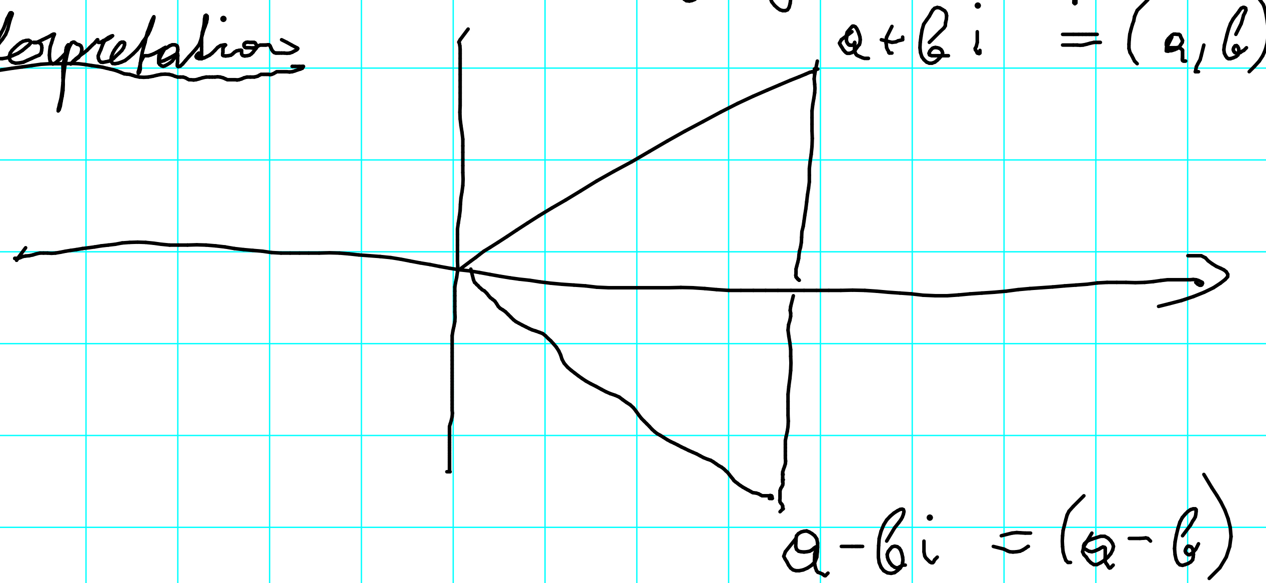
Bemerkung. Das verallgemeinert den reellen Absolutbetrag.

Definition Sei $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\bar{z} = a - bi$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Geometr. Interpretation



Komplexe Konjugation entspricht Spiegelung an der x-Achse.

Definition Sei $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Dann heißt

a der Realteil von z, schreibe $a = \operatorname{Re} z$

b der Imaginärteil von z, schreibe $b = \operatorname{Im} z$

Beispiel $z = 2 + 3i$ $\quad \operatorname{Re} z = 2$ $\quad \operatorname{Im} z = 3$

nicht $3i$

Satz 1.4 (Eigenschaften von komplexer Konjugation und Absolutbetrag)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(3) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

(4) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

(5) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(6) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Beweis 1) Schreibe $z = x + iy$ $\quad w = u + iv$

$$\overline{z+w} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = (x+u) - i(y+v)$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\bar{w} = u - iv$$

$$\bar{z} + \bar{w} = (x+u) - i(y+v)$$

(Juhu.)

2) $$\overline{z \cdot w} = \overline{(xu - vy) + i(uy + vx)} = (xu - vy) - i(uy + vx)$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (x - iy) \cdot (u - iv) = (ux - vy) + i(-yu - vx)$$

2.11.2009

3) $z\cdot\bar z = (x+iy)(x-iy) = x^2-(-1)y^2 = x^2+y^2 = |z|^2.$

4) $\frac{1}{2}(z+\bar z) = \frac{1}{2}(x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}) = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re} z$ ✓

5) $\frac{1}{2i}(z-\bar z) = \frac{1}{2i}\left(x+iy-(x-iy)\right) = \frac{1}{2i}(iy+iy) = \frac{2iy}{2i} = y = \operatorname{Im} z$ ✓

6) $|z\cdot w| \overset{3}{=} \sqrt{z\cdot w\cdot\overline{(z\cdot w)}} \overset{2}{=} \sqrt{z\cdot w\cdot\bar z\cdot\bar w} =$

$$= \sqrt{(z\bar z)\cdot(w\bar w)} \overset{3}{=} \sqrt{|z|^2\cdot|w|^2} = |z|\cdot|w| \qquad \square$$

<u>Bemerkung zu 3)</u>. $z\cdot\bar z = |z|^2 \implies \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

Wenn $z = a+bi$, so heißt das $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i$$

<u>Beispiel</u> Es geht auch ohne Formel:

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4+9+\cancel{6i-6i}} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$$

1.3.2. Matrizen

Definition. Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$.
Dann definiere

Zeilen

$$K^{m \times n} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \;\middle|\; a_{ij} \in K \text{ für } 1 \le i \le m;\ 1 \le j \le n \right\}$$

Spalten

$(m \times n)$-„Matrix"

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 4}$$

„Spalten kommen später"

Proposition. Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $K^{m \times n}$ mit komponentenweiser Addition

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

und komponentenweiser Multiplikation mit Skalaren

$$\alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

einen K-Vektorraum

Beweis Das ist wieder Spezialfall von Satz 1.1. $\square$

Beispiel
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Wir möchten Matrizen multiplizieren, weil es sich herausstellen wird, dass das nützlich ist.

Definition Seien K ein Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}$. Weiters seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$; $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le r}}$

Dann definiere $C = A\cdot B \in K^{m\times r}$ durch $C = (c_{ik})_{1\le i\le m}$

$1 \leq k \leq r$

mit

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} =$$

$$= a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

<u>Beispiel</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$ $\qquad$ $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 4}$

$$A \cdot B = C \in \mathbb{Q}^{2 \times 4}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 50 & 4 & 3 & 1 \\ 122 & 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}$$

$$= 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 50$$

$$c_{23} = a_{21}\, b_{13} + a_{22}\, b_{23} + a_{23}\, b_{33}$$
$$= 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 6$$

Man sieht auch den Tipp, A und B schräg übereinander zu schreiben:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 50 & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Satz 1.5 (Rechenregeln für Matrizenmultiplikation)

Seien K ein Körper, $m, n, r, s \in \mathbb{N}$; $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$, $C = (c_{jk}) \in K^{n \times r}$, $D = (d_{jk}) \in K^{n \times r}$, $E = (e_{kl}) \in K^{r \times s}$, $\alpha, \beta \in K$.

Dann gilt

1) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (überall $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq r$

2) ~~$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$~~

$A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D$

3) $\quad \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A \qquad\qquad 1 \leq l \leq s \quad)$.

4) $\quad A \cdot (C \cdot E) = (A \cdot C) \cdot E$.

<u>Beweis</u>. 1) $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij} \right)$

$$(A+B) \cdot C = \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) \right) =$$

$$= \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk} \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}} =$$

$$= A \cdot C + B \cdot C$$

2) analog.

3) $\quad \beta \cdot A = \left(\beta a_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = \left(\alpha \beta a_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = (\alpha \cdot \beta) \cdot (a_{ij}) = (\alpha \cdot \beta) A.$$

4) $A\cdot(C\cdot E)$

Setze $F = C\cdot E = \left(f_{jl}\right) = \left(\sum_{k=1}^{r} c_{jk}\, e_{kl}\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le l\le 5}}$

$$A\cdot(C\cdot E) = A\cdot F = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot f_{jl}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le l\le 5}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{r} c_{jk}\, e_{kl}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{r} a_{ij}\, c_{jk}\, e_{kl}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{jk}\, e_{kl}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{jk}\right)\cdot e_{kl}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le l\le 5}} = (A\cdot C)\cdot E$$

$\square$

Beispiel 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} =$$

$2\times 3 \neq 2\times 3$

wird nicht funktionieren
nicht definiert

„Matrizen nicht kompatibel".

Bemerkung. Elemente der K^n kann man als Elemente des $K^{n\times 1}$ „Spaltenvektor" oder als Elemente des $K^{1\times n}$ „Zeilenvektor" sehen.

Solange keine Matrizenmultiplikation im Spiel ist, ist das egal.

Sobald Matrizenmultiplikationen im Spiel sind, muss man aufpassen.

In dieser LV: Im Zweifel · Spaltenvektor.

Beispiel.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \text{nicht kompatibel.}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 32$$

Definition. Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Dann definiere die Abbildung

$$\cdot^t : K^{m \times n} \to K^{n \times m}$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \longmapsto A^t = (a_{ij})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}} = (a_{ji})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

„A transponiert"

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A^t = (b_{ji})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}} \qquad b_{ji} = a_{ij}$$

Bemerkung Es gibt viele Notationen für die Transposition:

$$A^T \qquad A^{\top} \qquad {}^tA \qquad A'$$

Satz 1.6 (Rechenregeln für die Transposition)

Seien K ein Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}$, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{m\times n}$, $C \in K^{n\times r}$, $\alpha \in K$. Dann gilt

1) $(\alpha A)^t = \alpha (A^t)$
2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
3) $(A\cdot C)^t = C^t \cdot A^t$

<u>Beweis</u>. 1), 2) fad

3) Setze $A\cdot C = D = (d_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le r}}$ mit

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} .$$

$$D^t = (d_{ik})_{\substack{1\le k\le r\\ 1\le i\le m}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}\right)_{\substack{1\le k\le r\\ 1\le i\le m}} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} c_{jk} a_{ij}\right)_{\substack{1\le k\le r\\ 1\le i\le m}}$$

$$= \left(c_{jk}\right)_{\substack{1\le k\le r\\ 1\le j\le n}} \cdot \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}} = C^t \cdot A^t. \qquad \square$$

<u>Korollar</u> Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $K^{n\times n}$ eine assoziative unitäre K-Algebra.

<u>Beweis</u>. Assoziative Algebra ✓ Satz 1.5

Für unitär: Setze $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \left(\delta_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \dots\ i=j \\ 0 & \dots\ i\neq j \end{cases}$$

„Kronecker - Delta"

Dann gilt für alle $A \in K^{n\times n}$: $I\cdot A = A \cdot I = A$.

$$\left(I\cdot A = \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\, a_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} = \left(\delta_{ii}\, a_{ik}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}} = \left(a_{ik}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le k\le n}}\right.$$

$$A \cdot I = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{jk} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le n}} = \left(a_{ik} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le n}} = A \right)$$

$\square$

<u>Definition</u> $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ heißt Einheitsmatrix,

man schreibt auch I_n.

Man findet auch die Notation E_n (nicht in dieser LV).

3.11.2009

<u>Bemerkung</u> Das neutrale Element bzgl der Addition, also jenes 0, sodass $0 + A = A$ für alle $A \in K^{m \times n}$ heißt Nullmatrix, $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$.

<u>Achtung</u> Diverse Rechenregeln, die man sich vielleicht wünschen würde (Kommutativität, nullteilerfrei) gelten im Allgemeinen nicht, vgl. Ü 23–25

1.3.3. Polynome

Proposition. Sei K ein Körper, $K^{\mathbb{N}_0} = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ Folge über } K \}$,

setze

$$K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}} = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid \text{nur endlich viele Glieder sind } \neq 0 \} =$$

$$= \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid \text{es gibt ein } N, \text{ sodass } a_n = 0 \text{ für alle } n > N \}.$$

Dann ist $K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$ ein Untervektorraum von $K^{\mathbb{N}_0}$.

Beispiel

- $(0, 3, 1, 1, 2, 0, 0, 9, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \in K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$
- $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots) \notin K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$

Beweis der Proposition. $K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}} \neq \emptyset$ (z.B. $(0, 0, \ldots) \in K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Elemente aus $K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$, $\alpha \in K$.

Sei $N_1 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $a_n = 0$ für $n > N_1$.
$N_2 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $b_n = 0$ für $n > N_2$.

Setze $M = \max(N_1, N_2)$ Damit gilt

$$a_n = 0 \quad \text{für } n > M$$
$$b_n = 0 \quad \text{für } n > M$$

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} + \alpha (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also

$$c_n = a_n + \alpha b_n$$

Für $n > M$ gilt

$$c_n = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \quad (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$. $\square$

<u>Definition</u> Wir definieren $\cdot : K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}} \times K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}} \to K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$ durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

n

wobei $\quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0.$

Satz 1.7 Mit dieser Multiplikation wird $K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$ zu einer assoziativen, kommutativen, unitären K-Algebra.
Das neutr. El. bzgl der Multiplikation ist
$$(\delta_{n0})_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, 0, 0, 0, \text{———————})$$

Beweis. Seien $(a_n), (b_n), (c_n) \in K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$, $\alpha, \beta \in K$.

1.) Bh. $(a_n)\cdot(b_n) \in K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$

Wähle $N_1 \in \mathbb{N}_0$ und $N_2 \in \mathbb{N}_0$ so, dass
$$a_n = 0 \quad \text{für } n > N_1 \quad \text{und} \quad a_{N_1} \neq 0$$
$$b_n = 0 \quad \text{für } n > N_2 \quad \text{und} \quad b_{N_2} \neq 0.$$
(Fall $(a_n) = 0$ bzw. $(b_n) = 0$ schauen wir uns nachher an).

Setze $(d_n) = (a_n)\cdot(b_n)$, also
$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Es gilt

$$d_{N_1+N_2} = \sum_{k=0}^{N_1+N_2} a_k \, b_{N_1+N_2-k} \overset{a_k = 0 \text{ für } k > N_1}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{N_1} a_k \, b_{N_1+N_2-k} =$$

$b_{N_1+N_2-k} = 0$ für $N_1+N_2-k > N_2$ $\Leftrightarrow$ $N_1 - k > 0$ $\Leftrightarrow$ $N_1 > k$

$$= \sum_{k=N_1}^{N_1} a_k \, b_{N_1+N_2-k} = a_{N_1} \cdot b_{N_1+N_2-N_1} =$$

$$= \underbrace{a_{N_1}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{b_{N_2}}_{\neq 0} \neq 0$$

Sei jetzt $m > N_1 + N_2$.

$$d_m = \sum_{k=0}^{m} a_k \, b_{m-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N_1} a_k \, b_{m-k}$$

Für $k \le N_1$ gilt $m-k \ge m-N_1 > N_1+N_2-N_1 = N_2$

$$\Rightarrow \quad d_m = \sum_{k=0}^{N_1} a_k \cdot 0 = 0. \qquad \Rightarrow (d_n) \in K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$$

Wenn $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist auch $a_k b_{n-k} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also auch $(a_n) \cdot (b_n) = (0)$.
Für $(b_n) = 0$ analog.

2) Beh.: $(a_n) \cdot (b_n) = (b_n) \cdot (a_n)$

Sei $(d_n) = (a_n) \cdot (b_n)$, also $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$(e_n) = (b_n) \cdot (a_n)$, also $e_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

$$e_n = b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \dots + b_{n-1} a_1 + b_n a_0$$

$\Rightarrow d_n = e_n.$

3) __Bew__ $\left((a_n)+(b_n)\right)\cdot(c_n) = (a_n)\cdot(c_n) + (b_n)\cdot(c_n)$

$$(a_n+b_n)\cdot(c_n) = \left(\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\,c_{n-k}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\left(a_k c_{n-k} + b_k c_{n-k}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}\right) =$$

$$= (a_n)\cdot(c_n) + (b_n)\cdot(c_n).$$

✓

5.11.2009

4) __Bew.__ $\alpha\cdot\left((a_n)\cdot(b_n)\right) = (\alpha a_n)\cdot(b_n).$

$$\alpha\cdot\left((a_n)\cdot(b_n)\right) = \alpha\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\alpha\, a_k b_{n-k}\right)_n =$$

$$= (\alpha a_n)\cdot(b_n)$$

5) $(a_n)\cdot\left((b_n)\cdot(c_n)\right)$ Assoziativ

Setze $(b_n)\cdot(c_n) = (d_n)$, also $d_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$

$$X = (a_n)\cdot\big((b_n)\cdot(c_n)\big) = (a_n)\cdot(d_n) = \left(\sum_{l=0}^{n} a_l\, d_{n-l}\right)_n =$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{n} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-l} b_k\, c_{n-l-k}\right)\right)_n =$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l} a_l\, b_k\, c_{n-l-k}\right)_n$$

$$0 \le l \le n$$
$$0 \le k \le n-l$$

Setze $m = k+l$, also $k = m-l$, somit $0 \le m-l \le n-l$.

$\Leftrightarrow \quad l \le m \le n$

$$\Rightarrow \quad X = \left(\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=l}^{n} a_l\, b_{m-l}\, c_{n-m}\right)_n$$

Summationsgrenzen $\Leftrightarrow \quad 0 \le l \le m \le n$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le m \le n$ und $0 \le l \le m$

$$\Rightarrow \quad X = \Big(\sum_{m=0}^{n} \underbrace{\Big(\sum_{l=0}^{m} a_l\, b_{m-l} \Big)}_{=:\, e_m} c_{n-m} \Big)_n$$

$$= \Big(\sum_{m=0}^{n} e_m\, c_{n-m} \Big)_n = (e_n)_n \cdot (c_n)_n$$

$$= \big((a_n)_n \cdot (b_n)_n \big) \cdot (c_n)_n$$

6) unitär.

$$(\delta_{n0})_n \cdot (a_n) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \delta_{k0}\, a_{n-k} \Big)_n = (1 \cdot a_{n-0})_n = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Nur 1. Summand überlebt

$\square$

<u>Bemerkung</u>. Wir können ein $\alpha \in K$ identifizieren mit $(\alpha, 0, \ldots \ldots)$

Addition kein Problem

$$(\alpha, 0, \ldots\ldots) \cdot (\beta, 0, \ldots .\, 0 \ldots) = (\alpha \cdot \beta,\, \alpha \cdot 0 + 0 \cdot \beta,\, \alpha \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \beta, \ldots) =$$

$= (\alpha \cdot \beta, 0, \_\_\_, 0, \ldots)$

Behauptung Sei $X = (0,1,0, \ldots) = (\delta_{n1})_n$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dass $X^k = (0,0,\ldots,0,\overset{k\text{-te Position}}{1},0,\ldots) = (\delta_{nk})_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Beweis durch vollständige Induktion

Prinzip der vollst. Induktion: Sei $A(n)$ eine Aussageform, wobei $n \in \mathbb{N}$.
Wenn $A(1)$ gilt („Induktionsbasis" bzw „Induktionsanfang") und unter der Annahme der Gültigkeit von $A(n)$ für ein bestimmtes n („Induktionsannahme" oder „Induktionsvoraussetzung") bewiesen werden kann („Induktionsschritt"), dass auch $A(n+1)$ gilt („Induktionsbehauptung"); so gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$

Induktionsbasis: $k = 1$. $X^1 = X = (0,1,0,\ldots)$ passt.

Induktionsannahme: $X^k = (\delta_{nk})_n$

Induktionsbehauptung $X^{k+1} = (\delta_{n(k+1)})_n$.

Bew. der IB $X^{k+1} = X^k \cdot X \overset{\text{I.A.}}{=} (\delta_{nk})_n \, (\delta_{n1})_n =$

$$= \left(\sum_{\ell=0}^{n} \delta_{\ell k} \, \delta_{(n-\ell)1} \right)_n =$$

$$= \left(\sum_{\ell=0}^{n} \delta_{\ell k} \, \delta_{\ell (n-1)} \right)_n =$$

$$= \left(\delta_{(n-1)k} \right)_n = \left(\delta_{n(k+1)} \right)_n \quad \checkmark$$

Für $k=0$ ist alles klar $X^0 = (1, 0, \ldots)$ $\square$

Wir können daher eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_d, 0, \ldots)$ folgendermaßen schreiben:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_d, 0, \ldots, 0) = (a_0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + (0, 0, a_2, 0, \ldots)$$
$$+ \ldots + (0, 0, \ldots, 0, a_d, 0, \ldots) =$$

$= a_0 \cdot (1, 0, \ldots) + a_1 (0, 1, 0, \ldots) + a_2 (0, 0, 1, \ldots) + \ldots +$
$+ a_d (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$

$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_d X^d$

$(a_0 + a_1 X + \ldots + a_d X^d)(b_0 + b_1 X + \ldots + b_e X^e) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X +$
$+ X^2 (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$

<u>Definition</u> Sei K ein Körper, X ein freier Buchstabe („Unbestimmte" oder „Variable"). Dann ist

$K[X]$

die in Abschnitt betrachtete Menge von Folgen $K^{\mathbb{N}_0}_{\text{endl}}$ mit der Vereinbarung $X = (0, 1, 0, \ldots)$. „Polynomring über K"

Der Grad „$\deg f$" eines Polynoms $f \in K[X]$ ist definiert als

$\max\{ n \mid a_n \neq 0 \}$

für $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$, weiters setze

$$\deg 0 = -\infty.$$

<u>Proposition</u>. Seien $f, g \in K[X]$. Dann gilt

1) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$

2) $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$

<u>Beweis</u> 1) Für $f \neq 0$ und $g \neq 0$ wurde das bereits im Beweis von Satz 1.7 (1) gezeigt,

$$N_1 = \deg f$$
$$N_2 = \deg g.$$

Wenn $f = 0$, dann gilt $f \cdot g = 0$.

$$\deg(f \cdot g) = \deg(0) = -\infty$$
$$\deg(f) + \deg(g) = -\infty + \deg(g) = -\infty$$

9.11.2009

2) Für $f \neq 0$ und $g \neq 0$ stand das eigentlich schon im Proposition vor Satz 1.7.

Für $f = 0$ oder $g = 0$ passt auch alles $\square$

Beispiel. $\left.\begin{aligned} f &= 1+2X+3X^2 \\ g &= 4+5X+6X^2 \\ h &= 7+8X \\ p &= 9+10X-3X^2 \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}[X]$ $\quad \begin{aligned} \deg f &= 2 \\ \deg g &= 2 \\ \deg h &= 1 \\ \deg p &= 2. \end{aligned}$

$$\deg(f+g) = \deg\left(5+7X+9X^2\right) = 2 = \max(\deg(f), \deg(g))$$

$$\deg(f+p) = \deg\left(10+12X+0X^2\right) = 1 < \max(\deg(f), \deg(p))$$

$$\deg(f+h) = 2 = \max(\deg(f), \deg(h)).$$

$\square$

Satz 1.8 (Polynomdivision) Sei K ein Körper, $f, g \in K[X]$ mit $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q \in K[X]$ und $r \in K[X]$ mit

$$f = g \cdot q + r \quad \text{und} \quad \deg r < \deg g.$$

Beweis (Existenz). Betrachte $m = \deg f$ und $n = \deg g$.

Falls $m = -\infty$, also $f = 0$, dann $0 = g \cdot 0 + 0$ ✓

Induktionsbasis $m = 0$.

Falls $n = 0$: $\quad \ell = \frac{f}{g} \in K \qquad r = 0$

Falls $n > 0$, $\quad \ell = 0 \qquad r = f$.

$$\deg r = \deg f = m = 0 < n = \deg g$$

$$f = 0 \cdot g + f$$

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle Polynome f vom Grad kleiner als ein festes m.

Induktionsbehauptung: Es gilt auch für Polynome vom Grad m.

Bew. Sei f ein Polynom vom Grad m.

Falls $m < n = \deg g$, so bleibe faul und setze

$\ell = 0$ und $r = f$ und alles passt.

Sei jetzt also $m = \deg f \geq \deg g$.

$$f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j = a_m X^m + \text{~~klein~~ viele Terme niedriger Ordnung}$$

$$g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j = b_n X^n + \text{———}$$

$$\ell_1 = \frac{a_m}{b_n} X^{m-n}$$

$$f_1 = f - \ell_1 g = \sum_{j=0}^{m-1} a_j X^j + \cancel{a_m X^m} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_m b_j}{b_n} X^{j+m-n} - \cancel{\frac{a_m}{b_n} \cdot X^{m-n} \cdot b_n X^n}$$

Da $j+m-n \leq \cancel{n}-1+m-\cancel{n} = m-1$

folgt $\deg f_1 \leq m-1$

Lt I.A. gibt es Polynome $\ell_2, r \in K[X]$ mit $\deg r < \deg g$ und

$$f_1 = \ell_2 \cdot g + r$$

$$\Rightarrow \quad f = f_1 + \ell_1 g = \ell_2 \cdot g + r + \ell_1 \cdot g = \underbrace{(\ell_1 + \ell_2)}_{=:\ell} g + r$$

ist die gewünschte Darstellung.

Existenz der Polynome ℓ und r bewiesen

zur Eindeutigkeit: Seien $f, g, \ell_1, \ell_2, r_1, r_2 \in K[X]$ mit

$$\left.\begin{array}{l} f = \ell_1 \cdot g + r_1 \\ f = \ell_2 \cdot g + r_2 \end{array}\right\} - \qquad \begin{array}{l} \deg r_1 < \deg g \\ \deg r_2 < \deg g \end{array}$$

$$(\rho_2-\rho_1)g \quad = \quad r_1-r_2$$

$$\deg g > \max(\deg r_1, \deg r_2) \geq \deg(r_1-r_2) = \deg((\rho_2-\rho_1)g) =$$

$$= \deg(\rho_2-\rho_1) + \deg g$$

$$\Rightarrow \quad \deg(\rho_2-\rho_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_2-\rho_1 = 0 \quad \Rightarrow \rho_2 = \rho_1$$

$$r_1 - r_2 = 0 \cdot g = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = r_1 \qquad \square$$

<u>Beispiel</u>: $f = X^3+X^2-2$ $\quad \in \mathbb{Q}[X]$

$g = (X-1)$

$$(X^3+X^2-2) : (X-1) = X^2+2X+2$$

$$\begin{array}{l} -X^3+X^2 \\ \hline 0 \quad 2X^2-2 \\ \quad -2X^2+2X \\ \hline \qquad 2X-2 \\ \qquad -2X+2 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad X^3+X^2-2 = (X^2+2X+2)(X-1)+0$$

0 Rest

<u>Definition</u> Sei $f \in K[X]$, $\alpha \in K$, $f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$

Dann setze $f(\alpha) = \sum_{j=0}^{m} a_j \alpha^j$.

<u>Proposition</u>. Seien $f, g \in K[X]$ $\alpha \in K$. Dann gilt

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$$
$$(f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha)$$

<u>Beweis</u> durch Einsetzen ist Privatvergnügen ... $\square$

<u>Definition</u> Sei $f \in K[X]$, $\alpha \in K$.
α heißt Nullstelle von f, wenn $f(\alpha) = 0$.

<u>Proposition</u>. Sei $f \in K[X]$, $\alpha \in K$.
Dann ist α genau dann eine Nullstelle von f wenn die Polynomdivision von f durch $(X-\alpha)$ Rest 0 ergibt.

<u>Beweis</u>. Seien $q, r \in K[X]$ mit $\deg r < \deg(X-\alpha) = 1$

$\Rightarrow$ $r \in K$, sodass

$$f = p \cdot (X-\alpha) + r$$

Setze $X = \alpha$. Ist voriger Prop. gilt

$$f(\alpha) = \underbrace{p(\alpha) \cdot \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{0}}_{0} + r$$

$\Rightarrow$ $f(\alpha) = r$. Alles folgt. $\square$

<u>Satz 1.9.</u> Sei K ein Körper, $f \in K[X]$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $r \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$, $g \in K[X]$, sodass

g keine Nullstellen in K besitzt und

$$f = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2) \dots (X-\alpha_r)\, g$$

<u>Bemerkung</u> Die $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sind die Nullstellen von f.

<u>Beweis</u> durch Induktion nicht allzu schwer; wegen Ungeduld entfallen. $\square$

<u>Definition</u> Sei K ein Körper, $f \in K[X]$.

Wir sagen, f zerfalle über K in Linearfaktoren, wenn $g \in K$ in obiger Darstellung ist, also

$$f = \underset{\in K}{g}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$$

<u>Satz 1.10.</u> (Fundamentalsatz der Algebra) Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren.

Der Beweis gelingt mit etwas Mühe mit den Hilfsmitteln der reellen Analysis
oder mühelos —— " —— komplexen — " —.
ohne geht es nicht.

....

<u>Korollar aus Satz 1.9.</u> Sei $f \in K[X]$; $f \neq 0$.
Dann besitzt f höchstens $\deg f$ ~~Null~~ viele Nullstellen in K.

<u>Beweis.</u> $f = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_r)\cdot g$.
$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ einzige Nullstellen.

$$\Longrightarrow \quad \deg f = \underbrace{1 + \dots + 1}_{r} + \deg g \geq r$$