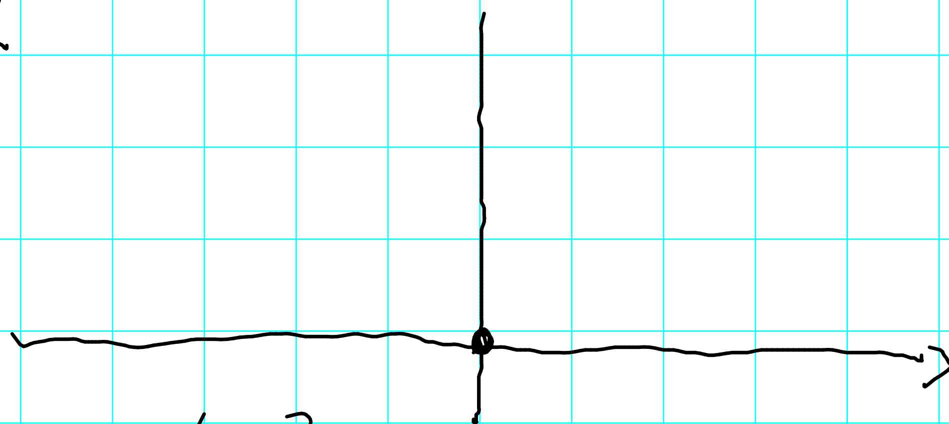
1.4. Erzeugnisse, Linearkombinationen, Erzeugendensysteme

(9.11.2009)

Situation: K-Vektorraum V, $\quad M \subseteq V$ $\quad$ (M nicht groß.)

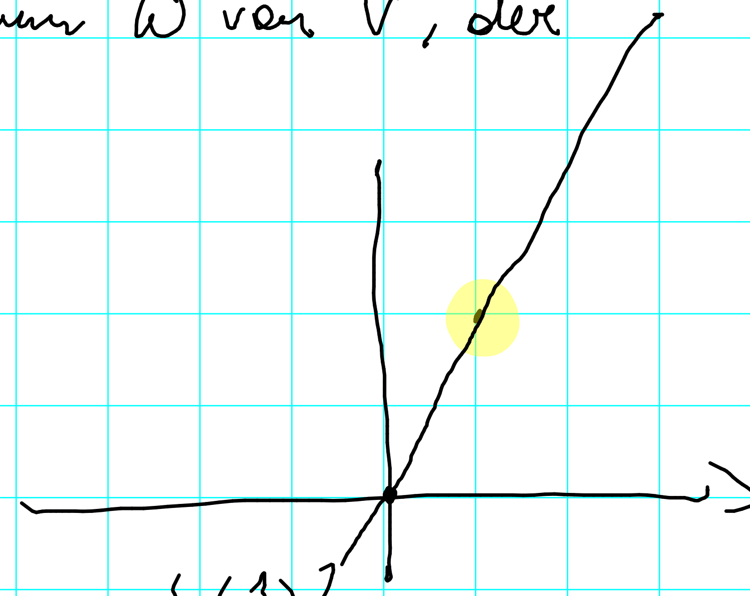
Suche den „kleinsten" Untervektorraum W von V, der M enthält.

Bsp $\quad V = \mathbb{R}^2$



$M = \{0\}$.

$\Rightarrow W = \{0\}$



$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Gerade durch geg. Punkt,

($\mathbb{R}^2$ wäre auch ein UVR, der $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält, aber eben nicht der „kleinste").

Was soll „klein" heißen?

Wenn $W_1 \subseteq W_2$, dann ist wohl W_1 kleiner oder gleich W_2.

Definition Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum,

1) $M \subseteq V$. Wir setzen

$$\operatorname{span}(M) := \bigcap_{\substack{W \text{ UVR von } V \\ M \subseteq W}} W$$

2) Sei $U \leq V$ und $N \subseteq V$.
Dann heißt N ein Erzeugendensystem von U,
wenn $U = \operatorname{span}(N)$ ist.

Satz 1.11. (Charakterisierung des span) Sei $K \in K$ u $V \in KVR$, $M \subseteq V$.
Dann gilt

1) $\operatorname{span}(M)$ ist ein Untervektorraum von V, der M enthält

2) $\operatorname{span}(M) = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \mid m \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \dots, v_m \in M,\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \}$.

Beispiel. (das ist Bsp 2 aus Abschnitt 1.1)

$$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 \}$$
$$= \{ \alpha \cdot (1,0,-1) + \beta (0,1,-1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$\Longrightarrow$

$$E = \operatorname{span}\left(\{(1,0,-1),\ (0,1,-1)\}\right)$$

oder äquivalent dazu

$\{(1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$ ist ein Erzeugendensystem von E.

Übrigens wäre auch

$\{(1,0,-1),\ (0,1,-1),\ (1,1,-2)\}$ ein Erz.syst von E.

<u>Beweis Satz 1.11.</u> Setze $S := \operatorname{span}(M)$

1) Bel. Durchschnitt von UVR ist UVR, vgl Ü 18.

2) Setze $L := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \mid m \in \mathbb{N}_0,\ v_1, \dots, v_m \in M,\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K\}$.

<u>Beh.</u> $L \subseteq S$.

Sei $\underbrace{\alpha_1 v_1}_{\in S} + \dots + \alpha_m v_m \in L$ (mit Text)

$\left(v_1 \in M \subseteq W\right.$ für jedes $W \leq V$ mit $M \subseteq W$, also auch $v_1 \in \bigcap_{\substack{W \leq V \\ M \subseteq W}} W = S.\left.\right)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\alpha_1 \underset{\in S}{v_1}}_{\substack{\in S, \\ \text{weil } S \text{ UVR}}} + \dots + \underbrace{\alpha_m \underset{\in S}{v_m}}_{\in S} \in S, \text{ weil jeder Summand in } S \text{ ist}$$

$$\Rightarrow \quad L \subseteq S.$$

<u>Beh.</u> $L \leq V$.

- $L \neq \emptyset$, weil zumindest die leere Summe $0 \in L$.
- Seien $\left.\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \\ \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \end{array}\right\} \in L$ und $\left(\begin{array}{l} m \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in K, v_j \in M \\ n \in \mathbb{N}_0, \beta_j \in K, w_j \in M \end{array}\right)$

  und $\gamma \in K$.

  Dann gilt

$$(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) + \gamma(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n) =$$

$$= \underbrace{\alpha_1}_{\in K} \underset{\in M}{v_1} + \dots + \underbrace{\alpha_m}_{\in K} \underset{\in M}{v_m} + \underbrace{(\gamma \beta_1)}_{\in K} \underset{\in M}{w_1} + \dots + \underbrace{(\gamma \beta_n)}_{\in K} \underset{\in M}{w_n} \in L.$$

Beh. bew.

<u>Beh.</u> $S \subseteq L$.

Wir wissen, dass $L \leq V$ und dass

$M \subseteq L$ (jedes $v \in M$ kann als Summe $1 \cdot v \in L$ geschrieben werden [Summe von einem Summanden])

Damit ist L einer der UVR, deren Durchschnitt S ist, also $S \subseteq L$ Beh. bew.

$\Longrightarrow S = L$. $\square$

<u>Bemerkung 1)</u> $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ heißt eine K-Linearkombination von $\{v_1, \dots, v_m\}$.

<u>Bemerkung 2</u> Die Durchschnittskonstruktion

$$\bigcap_{\substack{W \text{ gut} \\ M \subseteq W}} W$$

ist eine typische Operation in der Math., vgl. viele andere Bereiche.

<u>Noch ein Beispiel</u> $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} =$

$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ (Nachrechnen)

A span $\mathbb{R}^3$ fad

aber zu fad, um sowas in der Übung als Lösung anzugeben!