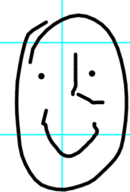
1.5. Lineare Unabhängigkeit und Basen

(9.11.2009)

<u>Ziel</u>: „minimale" Erzeugendensysteme,

$$E = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$




Wie formalisiert man gute Erzeugendensysteme?

Wenn ein Element w eines Erzeugendensystems M als Linearkombination

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

von anderen Elementen $v_1, \dots, v_m \in M$ dargestellt werden kann, dann ist es „überflüssig":

$$\beta w + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n = \beta \alpha_1 v_1 + \beta \alpha_2 v_2 + \dots + \beta \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$$

$\beta, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$

$w_1, \dots, w_n \in M$.

Wenn man das direkt umsetzen will, hätte man für ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_m$ m Tests durchzuführen:

Ist v_1 Linearkomb. von $v_2, \ldots, v_m$?

v_2 — " — $v_1, v_3, \ldots, v_m$?

v_3 — " — $v_1, v_2, v_4, \ldots, v_m$?

$\vdots$

v_m — " — $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$?

Man kann sich das vereinfachen:

<u>Definition</u> Sei V ein K-Vektorraum, $M \subseteq V$.
Dann heißt M linear abhängig, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_m \in M$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, nicht alle $\alpha_j = 0$, sodass

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$$

Andernfalls heißt M linear unabhängig.

10.11.2009

Bemerkung Wenn M linear abhängig ist und

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

mit $\alpha_i \neq 0$, dann folgt

$$-\alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_m v_m,$$

darf durch $-\alpha_i \neq 0$ dividieren und erhalte

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_i} v_m,$$

v_i war also „überflüssig"

Auch umgekehrt: wenn $v_1, \dots, v_m \in M$ und

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m,$$

dann folgt sofort

$$0 = -v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_m v_m,$$

damit linear abhängig.

Bsp 1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

Ansatz

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \mathrm{II} & 2\alpha + 3\beta + 7\gamma = 0 \\ \mathrm{III} & \underline{5\alpha + 5\beta + 15\gamma = 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{II} - 2\,\mathrm{I}: & 5\beta + 5\gamma = 0 \\ \mathrm{III} - 5\,\mathrm{I}: & 10\beta + 10\gamma = 0 \end{array}$$

zweimal die gleiche Gleichung $\beta + \gamma = 0$.

$$\beta = -\gamma \Leftrightarrow \gamma = -\beta$$

Probe:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} & \alpha - \beta - \beta = 0 & \alpha = 2\beta \\ \mathrm{II} & 2 \cdot 2\beta + 3\beta - 7\beta = 0 \; \checkmark & \\ \mathrm{III} & 5 \cdot 2\beta + 5\beta - 15\beta = 0 \; \checkmark & \end{array}$$

$\Rightarrow$ β beliebig, $\gamma = -\beta$, $\alpha = 2\beta$ ist tatsächlich Lösung.

insbesondere $\alpha = 2$

$\beta = 1$

$\gamma = -1$ eine Lösung:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$$

v_1, v_2, v_3 waren linear abhängig.

Tatsächlich gilt z.B.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \operatorname{span}(\{v_1, v_3\})$$

$$= \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Sind jetzt wenigstens diese l. u. ?

(*) $$\delta\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}1\\7\\15\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{array}{ll}\mathrm{I} & \delta+\varepsilon=0\\ \mathrm{II} & 2\delta+7\varepsilon=0\\ \mathrm{III} & 5\delta+15\varepsilon=0\end{array}$$

Aus I folgt $\varepsilon=-\delta$.

setze in II ein: $2\delta-7\delta=0 \Rightarrow -5\delta=0 \Rightarrow \delta=0$,

also $\varepsilon=0$.

Probe
$$0+0=0$$
$$2\cdot 0+7\cdot 0=0$$
$$5\cdot 0+15\cdot 0=0 \quad \checkmark$$

Also war $\delta=\varepsilon=0$ die einzige Lsg von (*).

$\Rightarrow$ v_1 und v_3 sind nicht l.a., also sind sie l.u.

In der Tat ist $E=\operatorname{span}(\{v_1,v_2,v_3\})=\operatorname{span}(\{v_1,v_3\})$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 2 V beliebig, $M=\emptyset$. Da es kein $m\in\mathbb{N}$, $v_1,\dots,v_m\in M$ gibt, ist M linear unabhängig und es gilt

$\text{span}(M) = \{0\}$

Beispiel 3. V beliebig, $M = \{\vec{0}\}$. ist l.a. $\text{span}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$

$$\underbrace{1}_{\in K} \cdot \underbrace{\vec{0}}_{\in V} = \vec{0}$$

Beispiel 4. V beliebig, $M = \{v\}$, $v \neq 0$, ist l.u.

$$\alpha \underbrace{v}_{\neq 0} = 0 \implies \alpha = 0$$

$\text{span}(\{v\}) =$ Gerade durch 0 und v.

Definition. Sei V ein K Vektorraum, $M \subseteq V$.
Dann heißt M eine Basis von V, wenn
M linear unabhängig ist und $\text{span}(M) = V$.

Beispiele. 1) K^n, $M = \{e_j \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ mit

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = (\delta_{kj})_{1 \le k \le n},$$

Bew. Dann ist M eine Basis des K^n.

- l.u.: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$

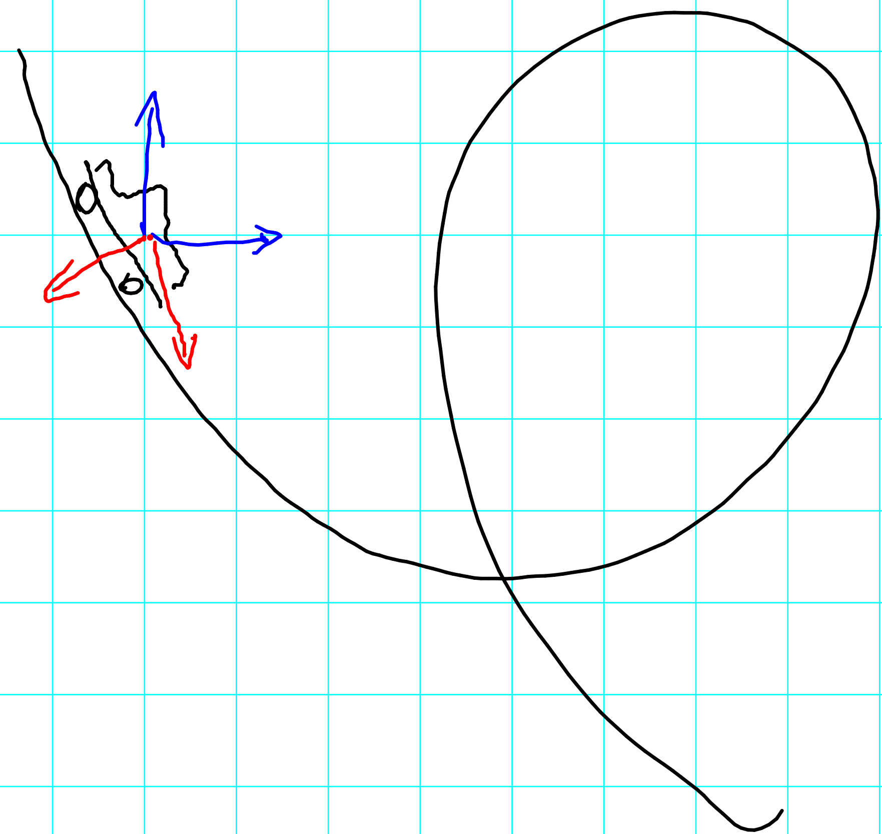
$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \text{l.u.} \quad \checkmark$$

- Erzeugendensystem: Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$. Dann gilt

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + \underbrace{v_n}_{\in K} \underbrace{e_n}_{\in M}. \quad \checkmark$$

Definition. Diese Basis heißt die Standardbasis des K^n.



verschiedene Situationen erfordern verschiedene Basen ...

<u>Beispiel 2</u>. (= Bsp 1 zu l.u.) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$

v_1, v_2, v_3 nicht l. u.

v_1, v_3 l. u. $\Longrightarrow$ $\{v_1, v_3\}$ ist Basis von $E = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ (Ebene).

<u>Beispiel 3</u>. $\emptyset$ ist Basis von $\{0\}$ in jedem Vektorraum.

12.11.2009

Satz 1.12 (Charakterisierung von Basen). *Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *M ist eine Basis von V*
(2) *M ist (bezüglich „$\subseteq$") ein minimales Erzeugendensystem von V (d.h., jedes $N \subsetneq M$ ist* kein *Erzeugendensystem von V)*
(3) *M ist (bezüglich „$\subseteq$") eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V (d.h., jedes $N \supsetneq M$ ist linear abhängig)*
(4) *Jedes $v \in V$ ist eindeutig als Linearkombination*

$$v = \sum_{w \in M} \lambda_w w$$

darstellbar, wobei die $\lambda_w \in K$ und nur endlich viele davon von 0 verschieden sind.

Bemerkung. *Falls $M = \{w_1, \dots, w_m\}$ endlich ist, so ist Punkt 4 äquivalent dazu, dass es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ gibt, sodass*

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m.$$

Beweis.

- „$1 \Rightarrow 2$". Wenn M eine Basis ist, ist es per definitionem auch ein Erzeugendensystem von V. Die Minimalität beweisen wir indirekt. Wir nehmen an, dass $N \subsetneq M$ ein Erzeugendensystem sei und wählen ein $v \in M \setminus N$. Dann gäbe es $w_1, \dots, w_r \in N$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, sodass

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r.$$

Durch Subtraktion erhalten wir

$$0 = (-1)v + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r.$$

Da $v, w_1, \dots, w_r \in M$, ist das ein Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von M.

- „$2 \Rightarrow 1$". Wir müssen nur zeigen, dass M linear unabhängig ist. Dazu nehmen wir indirekt an, dass

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r = 0$$

für gewisse $w_1, \dots, w_r \in M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gilt, wobei nicht alle $\lambda_j \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir somit an, dass $\lambda_1 \neq 0$. Dann ergibt sich allerdings

$$w_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} w_2 - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} w_r.$$

Daher ist auch $M \setminus \{w_1\}$ ein Erzeugendensystem von V, Widerspruch.

- „$1 \Rightarrow 3$". Per definitionem ist M linear unabhängig. Wir nehmen nun indirekt an, dass $N \supsetneq M$ linear unabhängig sei. Sei $v \in N \setminus M$. Da M ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es $w_1, \dots, w_r \in M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, sodass

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r.$$

Durch Subtraktion von v sehen wir, dass

$$0 = (-1)v + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r,$$

was der angenommenen linearen Unabhängigkeit von N widerspricht.

- „3 ⇒ 1“. Wir müssen lediglich zeigen, dass M ein Erzeugendensystem von V ist. Wir wählen ein $v \in V$. Falls $v \in M$, so ist $v = 1 \cdot v$ eine Linearkombination von v aus Elementen von M und es ist nichts mehr zu zeigen. Wir nehmen daher von nun an an, dass $v \notin M$. Da $M \cup \{v\}$ nach Voraussetzung nicht linear unabhängig ist, gibt es $w_1, \ldots, w_r \in M$ und $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, sodass
$$\lambda v + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_r w_r = 0$$
und nicht alle Skalare verschwinden. Falls $\lambda = 0$, so erhielten wir einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von M. Daher gilt $\lambda \neq 0$ und wir erhalten
$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} w_1 - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda} w_r,$$
also wie gefordert eine Linearkombination von v aus Elementen von M.
- „1 ⇒ 4“ Die Existenz einer Darstellung der angegebenen Form ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Tatsache, dass M ein Erzeugendensystem von V ist (man setze nicht die Koeffizienten der nicht in der Linearkombination auftretenden Basiselemente auf 0).
Die Eindeutigkeit beweisen wir indirekt. Wir nehmen an, ein $v \in V$ besitze zwei Darstellungen der geforderten Form. Es gibt also Skalare $\lambda_w \in K$ und $\mu_w \in K$ für $w \in M$, sodass
$$\sum_{w \in M} \lambda_w w = v = \sum_{w \in M} \mu_w w$$
und nur endlich viele der Skalare von 0 verschieden sind. Durch Subtraktion erhalten wir
$$0 = \sum_{w \in M} (\lambda_w - \mu_w) w,$$
wobei wiederum nur endlich viele $\lambda_w - \mu_w$ von 0 verschieden sein können. Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von M erhält man daraus aber unverzüglich $\lambda_w - \mu_w = 0$ für alle $w \in M$, also $\lambda_w = \mu_w$ und die beiden Darstellungen stimmten überein.
- „4 ⇒ 1“ Da jedes $v \in V$ als Linearkombination endlich vieler Elemente von M dargestellt werden kann, ist M ein Erzeugendensystem von V. Da $0 \in V$ jedenfalls die Darstellung
$$0 = \sum_{w \in M} 0 w$$
besitzt, und diese laut Voraussetzung die einzige ist, muss M auch linear unabhängig sein.

□

Es stellt sich nun die Frage, ob jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Falls ein Vektorraum ein endliches Erzeugendensystem besitzt, so ist dies leicht zu sehen: Man startet mit einem endlichen Erzeugendensystem und geht, solange das Erzeugendensystem nicht minimal ist, zu einer echten Teilmenge über, die noch Erzeugendensystem ist. Aufgrund der vorausgesetzten Endlichkeit bricht dieser Prozess nach endlich vielen Schritten ab. Als Ergebnis erhält man ein minimales Erzeugendensystem, also nach dem Satz eine Basis.

Frage: gibt es in jedem Vektorraum eine Basis? 16.11.2009

– wenn es endl. Erzeugendensystem gibt, dann sicher ja (lasse Elemente weg, solange noch immer Erz. syst.)

– wenn es kein endl. Erzeugendensystem gibt, muss man arbeiten:

Satz 1.13 (Existenz von Basen) Sei V ein K-Vektorraum, $U \subseteq V$ linear unabhängig, $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem mit $U \subseteq E$.

Dann gibt es eine Basis B von V mit

$$U \subseteq B \subseteq E.$$

Bemerkung, D.h. jede l.u. Teilmenge kann zu Basis erweitert werden; jedes Erzeugendensystem kann zu Basis verkürzt werden

Korollar Zu jedem K-Vektorraum existiert eine Basis.

Bew. des Korollars: l.u. $\to U = \emptyset \subseteq V$

$E = V \subseteq V$ und $\emptyset \subseteq V$

$\uparrow$ Erz. system.

Satz sagt: Es gibt eine Basis B mit

$$\emptyset \subseteq B \subseteq V$$

$\square$

Satz 1.13 benötigt das Auswahlaxiom oder eine dazu äquivalente Formulierung, hier also

<u>Lemma von Zorn</u> Sei S eine partialgeordnete Menge (mit $\leq$), $S \neq \emptyset$.
Wenn jede Kette C in S (eine Kette C ist eine Teilmenge von S, sodass für je zwei Elemente $x, y \in C$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$) eine obere Schranke in S besitzt (d.h. es gibt ein $z \in S$, sodass $\forall x \in C: x \leq z$), so besitzt S ein maximales Element.

<u>Beweis Satz 1.13.</u> Sei $S = \{ M \subseteq V \mid U \subseteq M \subseteq E \text{ und } M \text{ ist l.u.} \}$
S ist mittels „$\subseteq$" partialgeordnet.
$U \in S$ lt Voraussetzungen $\Longrightarrow S \neq \emptyset$.

Sei $C \subseteq S$ eine Kette in S. Wir suchen ein Element $T \in S$, das obere Schranke für C ist, also $\forall M \in C: M \subseteq T$.
Setzen wir

$$T := \bigcup_{M \in C} M,$$

so folgt offensichtlich, dass $\forall M \in C: M \subseteq T$. Nicht ganz so offensichtlich ist allerdings $T \in S$

$U \subseteq T$ gilt ($\forall M \in C$: $U \subseteq M \subseteq T$) ✓

Da für alle $M \in C$ gilt, dass $M \subseteq E$, muss auch $T \subseteq E$. ✓

Seien $x_1, \dots, x_m \in T$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = 0.$$

Für jedes der x_j gibt es ein $M_j \in C$ mit $x_j \in M_j$.
Für $i \neq j$ gilt (weil C eine Kette ist), dass $M_i \subseteq M_j$ oder $M_j \subseteq M_i$ ist. (Sortieren)
Nach geeigneter Umnummerierung der $x_1, \dots, x_m$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $M_1, \dots, M_m$ gilt

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_m$$

Daraus folgt

$$x_1, \dots, x_m \in M_m$$

Lt Voraussetzung ist M_m l.u. und daraus folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0,$$

also auch $x_1, \dots, x_m$ l.u. $\Rightarrow T$ l.u $\Rightarrow T \in S$.
Wir haben damit alle Voraussetzungen des Lemmas von Zorn überprüft, daher besitzt S ein maximales Element B.

Wir wissen: $B \in S \Rightarrow U \subseteq B \subseteq E$ und B ist l.u.

B ist maximales Element von S.

Wir müssen noch zeigen, dass B ein Erzeugendensystem von V ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass $E \subseteq \operatorname{span} B$.

Indirekt. Nehmen wir an, es gibt ein $e \in E$, sodass $e \notin \operatorname{span} B$.

Insbesondere $e \notin B$. Dann ist aber $\{e\} \cup B$ l.u.

($\lambda e + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0$ für $x_1, \dots, x_m \in B$, $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in K$,

so folgt (falls $\lambda \neq 0$)

$$e = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m \quad \Rightarrow e \in \operatorname{span} B, \text{ Wid}$$

oder $\lambda = 0$ und damit

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0, \text{ also } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0,$$

weil $x_1, \dots, x_m \in B$ l.u.)

Damit gilt $U \subseteq B \subseteq B \cup \{e\} \subseteq E$, also $B \cup \{e\} \in S$,

Widerspruch zur Maximalität von B in S

$\Rightarrow E \subseteq \operatorname{span} B$.

$\Rightarrow V = \operatorname{span} E \subseteq \operatorname{span} B \Rightarrow B$ ist Erz.syst. von V.

$\Rightarrow$ B ist Basis $\square$

<u>Bemerkung</u>: Wir waren hier etwas schlampig und haben l.u. Mengen, Basen, Erzeugendensysteme immer als <u>Mengen</u> gesehen. Man sollte sowas besser als Systeme sehen, also insbes. mehrfaches Auftreten von Elementen zulassen. Das ist l.u. Systemen und Basen zwar sinnlos und in einem Erz. system bringts eigentlich auch nichts, aber es erlaubt ggf. Reihenfolgen

<u>Notation</u> Ein Tupel $(x_1, \dots, x_m)$ heißt l.u. bzw. Basis, wenn die x_i paarweise verschieden sind und $\{x_1, \dots, x_m\}$ l.u. bzw. Basis ist