1.6. Dimension

Definition Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt V endlichdimensional, wenn V ein endl. Erzeugendensystem besitzt.

Proposition Sei V ein K-Vektorraum, $(u_1, \dots, u_r)$ l.u. in V, $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gilt

$$r \leq n$$

und es gibt $1 \leq i_1, \dots, i_{n-r} \leq n$, sodass

$$(u_1, \dots, u_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}})$$

eine Basis von V ist.

Bemerkung. Der 2. Teil der Proposition sagt, dass $(u_1, \dots, u_r)$ durch geeignete Elemente von $(v_1, \dots, v_n)$ zu einer Basis von V ergänzt werden kann.

Beweis. Vollst. Induktion nach r.

Induktionsbasis: $r = 0$. $0 \leq n$ na na

$(v_1, \ldots, v_n)$ ist geforderte „Ergänzung".

Induktionsann.: Die Beh. gelte für $r-1$ (mit $r \geq 1$)

Induktions Beh.: Die Beh. gilt dann auch für r.

Lt Induktionsannahme können $v_1, \ldots, v_n$ so umnumeriert werden, dass $(u_1, \ldots, u_{r-1}, v_1, \ldots, v_{n-(r-1)})$ eine Basis von V ist.

Daher gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n-(r-1)} \in K$, sodass

$$u_r = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{r-1} u_{r-1} + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{n-(r-1)} v_{n-(r-1)}$$

(weil $u_r \in V$)

Fall 1. $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-(r-1)} = 0.$

$$u_r - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 - \ldots - \lambda_{r-1} u_{r-1} = 0.$$

Widerspruch zur linearen Unabh. von $(u_1, \ldots, u_{r-1}, u_r)$.

Fall 2 es gibt ein $\mu_j \neq 0$ Nach entsprechender Umnummerierung war es $\mu_{n-r+1} \neq 0$.

Wir tauschen v_{n-r+1} gegen w_r ein.
Wir müssen zeigen, dass
$(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{n-r})$ eine Basis ist.

Zeige l.u. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{n-r} \in K$ mit

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{r-1} u_{r-1} + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0.$$

Also

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{r-1} u_{r-1} + \alpha_r \left(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{r-1} u_{r-1} + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-r} v_{n-r} + \mu_{n-r+1} v_{n-r+1} \right) + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0$$

$$(\alpha_1 + \lambda_1 \alpha_r) u_1 + \dots + (\alpha_{r-1} + \alpha_r \lambda_{r-1}) u_{r-1} + (\alpha_r \mu_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_r \mu_{n-r} + \beta_{n-r}) v_{n-r} + \alpha_r \mu_{n-r+1} v_{n-r+1} = 0.$$

Da $u_1, \dots, u_{r-1}, v_1, \dots, v_{n-r}, v_{n-r+1}$ eine Basis und daher l.u. waren, folgt

$$\alpha_1 + \lambda_1 \alpha_r = \dots = \alpha_{r-1} + \alpha_r \lambda_{r-1} = \alpha_r \mu_1 + \beta_1 = \dots = \alpha_r \mu_{n-r} + \beta_{n-r} = \alpha_r \underbrace{\mu_{n-r+1}}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_r = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = \beta_1 = \dots = \beta_{n-r} = 0,$$ tatsächlich l.u.

Erzeugendensystem:

Es gilt $u_r = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{r-1} u_{r-1} + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-r} v_{n-r} + \mu_{n-r+1} v_{n-r+1}$

$$\Rightarrow v_{n-r+1} = + \frac{1}{\mu_{n-r+1}} \cdot u_r - \frac{\lambda_1}{\mu_{n-r+1}} \cdot u_1 - \dots - \frac{\mu_{n-r}}{\mu_{n-r+1}} \cdot v_{n-r}$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_1, \dots, u_{r-1}, v_1, \dots, v_{n-r+1}}_{} \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{n-r})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{span}(\quad \Downarrow \quad)}_{= V} \subseteq \quad \text{———} \, {}'' \, \text{———}$$

$\square$

Satz 1.14. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Dann haben je zwei Basen die gleiche Kardinalität.

Bemerkung. Der Satz gilt auch für nicht endl.-dim VR, aber dazu brauchen wir mehr Kardinalzahlarithmetik, als mir jetzt lieb ist

Beweis Satz 1.14. Sei E ein endl. Erzeugendensystem.
E kann zu einer Basis B von V verkürzt werden,
$\Longrightarrow n := |B|$ ist endlich.
Ut Proposition oben gibt es keine l.u. Menge mit $n+1$ Elementen
$\Longrightarrow$ jede Basis von V hat höchstens n Elemente.

Sei M eine Basis von V. Wende Proposition mit B als l.u. Menge und M als Basis an und erhalte

$$n = |B| \leq |M| \underset{\text{s.o.}}{\leq} n$$

$\Longrightarrow |M| = |B|$ $\square$

Definition. Sei V ein K-Vektorraum und B eine Basis von V.
Dann definieren die Dimension von V

$$\dim V = \dim_K V = |B|$$

als Kardinalität von B.

Beispiele.

- $\mathbb{R}^n$ Basis $e_1, \dots, e_n \Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \}$.

Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim E = 2$ Ebene.

- $F = \{ (a_n) \text{ Folge} \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \}$.

Ü 40 f [Zukunft!]: $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ~~bilden~~ sind Basis.

$\Rightarrow \dim F = 2$

Proposition. Sei V endl.-dim K-Vektorraum, $W \leq V$.
Dann gilt $0 \leq \dim W \leq \dim V$

und es gilt $\dim W = \dim V$ genau dann, wenn $V = W$

Beweis. Sei $(u_1, \dots, u_r)$ eine Basis von W und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V.

Dann ist $(u_1, \dots, u_r)$ insbesondere l.u. (in V)

$$\xRightarrow{\text{obige Prop.}} \quad \underset{\dim W}{\underset{\|}{r}} \le \underset{\dim V.}{\underset{\|}{n}}$$

Wenn $r = n$, so kann $(u_1, \dots, u_r)$ nach obiger Proposition durch $\underset{\|}{n - r = 0}$ Elemente von $v_1, \dots, v_n$ zu einer Basis von V ergänzt werden, also ist $(u_1, \dots, u_r)$ eine Basis von V.

$$W = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_r) = V$$

Wenn $W = V$, dann folgt $\dim W = \dim V$. $\square$

Bemerkung. Der 2. Teil der Proposition gilt i. A. für unendl.-dim Vektorräume nicht!

Beispiel. Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$

Dann sind u, v, w l.u.:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \iff \begin{aligned} \alpha \quad\quad\quad\quad &= 0 \\ 2\alpha + \beta \quad\quad &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 17\gamma &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dim \operatorname{span}(u, v, w) = 3$$

$$\overset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{span}(u, v, w) = \mathbb{R}^3$$

Brauche also Erzeugendensyst. nicht mehr nachprüfen.