1.7. Summen und direkte Summen von Untervektorräumen

Definition. Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, \ldots, W_r \leq V$.
Dann setze
$$W_1 + W_2 + \ldots + W_r = \{ w_1 + w_2 + \ldots + w_r \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \ldots, w_r \in W_r \}$$

Beispiel.
$$g_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \text{Gerade}$$

$$g_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{Gerade.}$$

$$g_1 + g_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{Ebene}$$

das ist viel mehr als Vereinigung

Proposition. In obiger Situation gilt
$$W_1 + \ldots + W_r = \operatorname{span}(W_1 \cup \ldots \cup W_r),$$
insbesondere ist $W_1 + \ldots + W_r \leq V$.

17.11.2009

Es gilt

$$\dim(W_1 + \dots + W_r) \leq \dim(W_1) + \dots + \dim(W_r)$$

<u>Beweis</u>. 1) Wir zeigen, dass $W_1 + \dots + W_r \leq V$.

Für $w_1 + \dots + w_r \in W_1 + \dots + W_r$ mit $w_j \in W_j$

$u_1 + \dots + u_r \in W_1 + \dots + W_r$ $\quad u_j \in W_j$ für alle j

$\alpha \in K$

gilt

$$(w_1 + \dots + w_r) + \alpha(u_1 + \dots + u_r) = \underbrace{(w_1 + \alpha u_1)}_{\in W_1} + \dots + \underbrace{(w_r + \alpha u_r)}_{\in W_r}$$

$$\in W_1 + \dots + W_r \quad \checkmark$$

2) $W_j \subseteq W_1 + \dots + W_r$ (schreibe $w_j \in W_j$ als $\underbrace{0}_{\in W_1} + \dots + 0 + \underbrace{w_j}_{\in W_j} + \underbrace{0}_{\in W_{j+1}} + \dots + \underbrace{0}_{\in W_r}$)

für jedes j, also auch

$$W_1 \cup \dots \cup W_r \subseteq W_1 + \dots + W_r$$

Da $W_1 + \dots + W_r$ ein UVR ist, folgt

$$\operatorname{span}(W_1 \cup \dots \cup W_r) \leq W_1 + \dots + W_r.$$

3) <u>Beh</u>. $W_1 + \dots + W_r \leq \operatorname{span}(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r)$

Sei $w_1 + \dots + w_r \in W_1 + \dots + W_r$ mit $w_j \in W_j \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_r$

$$\Rightarrow w_1 + \dots + w_r = \underbrace{1 \cdot w_1 + \dots + 1 \cdot w_r}_{\in W_1 \cup \dots \cup W_r} \subseteq \operatorname{span}(W_1 \cup \dots \cup W_r)$$

4) Aussage über Dimensionen

Sei B_j eine Basis von W_j und $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$.

Beh. B ist Erzeugendensystem von $W_1 + \dots + W_r$.

Sei $w_1 + \dots + w_r \in W_1 + \dots + W_r$. mit $w_j \in W_j$ für alle j.

Jedes w_j ist als Linearkomb von Elementen von B_j schreibbar, also erst recht — " — B — " —.

Addiere diese Linearkombinationen und erhalte Linearkomb. von $w_1 + \dots + w_r$ aus Elementen von B

$$|B| \leq |B_1| + \dots + |B_r|$$

$$\dim(W_1 + \dots + W_r) \leq |B| \leq |B_1| + \dots + |B_r| = \dim W_1 + \dots + \dim W_r$$

$\square$

Beispiel 1 $W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 17 \\ 11 \\ 2009 \end{pmatrix}\right\}$ Gerade

Was ist $W + W$?

$$W+W = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}17\\11\\2009\end{pmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}17\\11\\2009\end{pmatrix}\right\}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}17\\11\\2009\end{pmatrix}\right\} = W.$$

$W+W=W$. aha.

Beispiel 2.

$$W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \qquad U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Ebene — Gerade.

$$W+U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$-1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

die 3 Vektoren waren l.a.

$$\Rightarrow W+U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} = W$$

$W+U=W$. auch aha.

Definition. Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \ldots, W_r \leq V$.
Dann heißt $W_1 + \ldots + W_r$ eine <u>direkte Summe</u>, wenn für alle $0 \neq w_j \in W_j$ gilt, dass
$$(w_1, \ldots, w_r)$$
linear unabhängig ist.
Wir schreiben dann $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$.

<u>Bsp von Anfang.</u>
$$g_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$
$$g_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$
$\left(\begin{pmatrix}s\\s\\s\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}\right)$ ist l.u. für alle $s, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Longrightarrow g_1 \oplus g_2$

Bei anderen beiden Bsp: keine direkte Summe: $\begin{pmatrix}17\\11\\2009\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}17\\11\\2009\end{pmatrix}$ ist l.a.

<u>Satz 1.15 (Charakterisierung direkter Summen)</u> Sei V ein K-Vektorraum, $W_1, \ldots, W_r \leq V$, $W = W_1 + \ldots + W_r$, alle W_j endl.-dim.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$

2) Seien für $j \in \{1, \dots, r\}$ Basen $(v_{j1}, \dots, v_{jd_j})$ von W_j gegeben. Dann ist

$$(v_{11}, \dots, v_{1d_1}, v_{21}, \dots, v_{2d_2}, \dots, v_{r1}, \dots, v_{rd_r})$$ eine

Basis von W.

3) $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_r$

4) Für jedes $w \in W$ gibt es eindeutig bestimmte $w_j \in W_j$ für $j \in \{1, \dots, r\}$ sodass

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_r.$$

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2) Wir wissen aus Beweis der obigen Proposition, dass

$$(v_{11}, \dots, v_{1d_1}, \dots, v_{r1}, \dots, v_{rd_r})$$

ein Erzeugendensystem von W ist.

z.z. l.u.

Sei $$(\lambda_{11} v_{11} + \dots + \lambda_{1d_1} v_{1d_1}) + \dots + (\lambda_{r1} v_{r1} + \dots + \lambda_{rd_r} v_{rd_r}) = 0$$ $\lambda_{ij} \in K$.

$$1 \cdot \underbrace{(\lambda_{11} v_{11} + \dots + \lambda_{1d_1} v_{1d_1})}_{\in W_1} + \dots + 1 \cdot \underbrace{(\lambda_{r1} v_{r1} + \dots + \lambda_{rd_r} v_{rd_r})}_{\in W_r} = 0$$

Wegen vorausgesetzter l.u. von Vektoren aus $W_1, \dots, W_r$ müssen alle Klammern $=0$ sein

$$\lambda_{11} v_{11} + \dots + \lambda_{1d_1} v_{1d_1} = 0 \implies \lambda_{11} = \dots = \lambda_{1d_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{r1} v_{r1} + \dots + \lambda_{rd_r} v_{rd_r} = 0 \implies \lambda_{r1} = \dots = \lambda_{rd_r} = 0$$

$\checkmark$

2) $\Rightarrow$ 1) Seien $0 \neq w_1 \in W_1, \dots, 0 \neq w_r \in W_r$ gegeben.
Wir sollen zeigen, dass $w_1, \dots, w_r$ l.u. sind.
Sei

$$\mu_1 w_1 + \dots + \mu_r w_r = 0. \qquad \text{für } \mu_1, \dots, \mu_r \in K.$$

Jedes w_j kann als Linkomb

$$w_j = \lambda_{j1} v_{j1} + \dots + \lambda_{jd_j} v_{jd_j}$$

der Basis von W_j geschrieben werden.

$$\mu_1 \left(\lambda_{11} v_{11} + \dots + \lambda_{1d_1} v_{1d_1} \right) + \dots + \mu_r \left(\lambda_{r1} v_{r1} + \dots + \lambda_{rd_r} v_{rd_r} \right) = 0$$

ausmultiplizieren.

Da die $(v_{11}, \ldots, v_{r d_r})$ Basis sind, folgt

$$\mu_j \lambda_{ji} = 0 \qquad \text{für alle } i, j.$$

Falls alle $\mu_j = 0$, sind wir fertig, falls $\mu_j \neq 0$, so

$$\lambda_{j1} = \ldots = \lambda_{j d_j} = 0, \text{ also } w_j = 0 \cdot v_{j1} + \ldots + 0 \cdot v_{j d_j} = 0$$

Das war nicht ausgemacht.

19.11.2009

$2) \Rightarrow 3)$ $(\quad , \quad , \quad)$ ist Basis von W

Insgesamt ist die Anzahl der Basiselemente die Summe der Basiselemente von $W_1, \ldots, W_r$ $\Longrightarrow \dim W = \dim W_1 + \ldots + \dim W_r$.

$3) \Rightarrow 2)$ $(\quad , \quad , \quad)$ ist Erzeugendensystem nach vorheriger Prop, und hat $\dim W = \dim W_1 + \ldots + \dim W_r$

Die Anzahl passt also und $(\quad , \quad , \quad)$ ist Basis.

1) $\Rightarrow$ 4) Existenz einer Darstellung ist die Def von Summe

Eindeutigkeit: Sei $w \in W$ mit zwei Darstellungen

$$u_1 + \dots + u_r = w = w_1 + \dots + w_r \qquad u_j, w_j \in W_j$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1 \underbrace{(w_1 - u_1)}_{\in W_1} + 1 \underbrace{(w_2 - u_2)}_{\in W_2} + \dots + 1 \underbrace{(w_r - u_r)}_{\in W_r}$$

Lt Def. direkte Summe müssen also $w_j - u_j = 0$ für alle j

$\Rightarrow$ $w_j = u_j$ für alle j, Darstellungen waren gleich.

4) $\Rightarrow$ 1) ~~Seien $0 \neq w_1, \dots, w_r$ aus $W_1, \dots, W_r$ l.a.~~

Seien $0 \neq w_j \in W_j$ für $j \in \{1, \dots, r\}$ l.a.,

also gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 w_1}_{\in W_1} + \dots + \underbrace{\lambda_r w_r}_{\in W_r} = 0 = \underset{\in W_1}{0} + \underset{\in W_2}{0} + \dots + \underset{\in W_r}{0}$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt

$$\lambda_1 w_1 = 0 \quad \dots \quad \lambda_r w_r = 0,$$

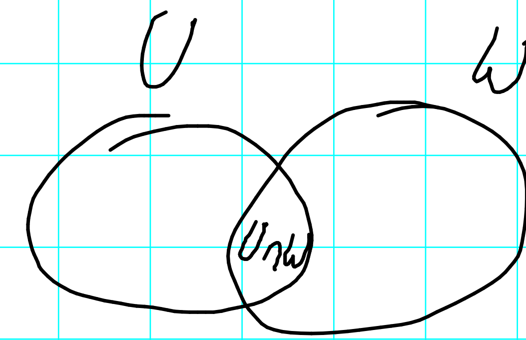
Da die w_j alle $\neq 0$ waren, müssen alle $\lambda_j = 0$ sein.
Wid. zur linearen Abhängigkeit $\square$

Bemerkung. Gilt $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ und „versteht" man jedes W_j, dann „verstehen" wir auch W

Satz 1.16 Sei V endl. dim K-Vektorraum, U und W Untervektorräume von V. Dann gilt

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Insbesondere ist $U+W$ genau dann eine direkte Summe, wenn $U \cap W = \{0\}$.



Beweis. Sei $(v_1, \dots, v_\ell)$ eine Basis von $U \cap W$

Diese kann zu Basis

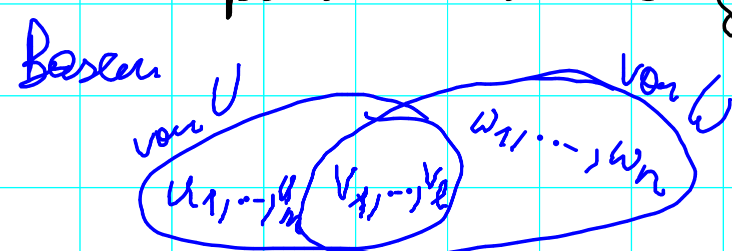
$$(v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_m)$$

von U ergänzt werden

Ergänze $(v_1, \dots, v_\ell)$ zu Basis

$$(v_1, \dots, v_\ell, w_1, \dots, w_n)$$

passt noch nicht ganz.



von W.

$$\dim U \cap W = l$$
$$\dim U = l + m$$
$$\dim W = l + n$$
$$\dim U + \dim W - \dim U \cap W = l+m+l+n-l = l+m+n$$

Hoffnung: $(v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ ist Basis von $U+W$.
Erzeugendensystem ist es jedenfalls, weil Basis von U und Basis von W enthalten.
Annahme $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0.$$

$$\underbrace{\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_l v_l}_{\in U} + \underbrace{\beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m}_{\in U}}_{\in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n}_{\in W}$$

$\Longrightarrow$ beide Seiten der Gleichung in $U \cap W$.

$\Longrightarrow \quad -\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_n w_n \in U \cap W$

Damit gibt es $\delta_1, \ldots, \delta_\ell \in K$ mit

$$-\gamma_1 w_1 - \ldots - \gamma_n w_n = \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_\ell v_\ell$$

(weil $v_1, \ldots, v_\ell$ eine Basis von $U \cap W$)

Also

$$\delta_1 v_1 + \ldots + \delta_\ell v_\ell + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0$$

Da $(v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_n)$ Basis von W ist, sind sie l.u.

$\Longrightarrow \quad \delta_1 = \ldots = \delta_\ell = \gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0$

$\Longrightarrow \quad \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m + 0 = 0$

Da $(v_1, \ldots, v_\ell, u_1, \ldots, u_m)$ Basis von U sind, sind sie l.u.

$\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_\ell = \beta_1 = \ldots = \beta_m = 0$

$\Longrightarrow \quad (v_1, \ldots, v_\ell, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ ist Basis von $U+W$,

also $\quad \dim U+W = \ell + m + n \quad$ wie erhofft.

$U+W$ direkte Summe $\overset{\text{voriger}}{\underset{\text{Satz (3)}}{\Longleftrightarrow}} \dim(U+W) = \dim U + \dim W$

$\Longleftrightarrow \quad \dim(U \cap W) = 0 \iff U \cap W = \{0\}. \quad \square$

Beispiele.

$$2 = 1 + 1 - 0$$
$$1 = 1 + 1 - 1$$
$$2 = 2 + 1 - 1$$

1.0,