Kapitel 2. Lineare Abbildungen

(19.11.2009)

2.1. Grundlegendes

Definition. Seien V und W zwei K-Vektorräume, $F: V \to W$.
Dann heißt F eine (K-)lineare Abbildung, wenn
1) $\forall u, v \in V: \quad F(u+v) = F(u) + F(v)$
2) $\forall \alpha \in K \; \forall v \in V: \quad F(\alpha v) = \alpha F(v)$

Operationen in V — Operationen in W

Beispiele. 1) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ y-z \end{pmatrix}$

Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = F\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) \\ (y_1+y_2)-(z_1+z_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) \\ (y_1-z_1)+(y_2-z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 \\ y_1-z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2+z_2 \\ y_2-z_2 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$F\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha x+\alpha y+\alpha z \\ \alpha y-\alpha z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x+y+z \\ y-z \end{pmatrix} = \alpha \cdot F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

Abb. ist linear

23.11.2009

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto 23x+11$

$$f(1+1) = f(2) = 23\cdot 2+11 = 57$$
$$f(1)+f(1) = (23\cdot 1+11)+(23\cdot 1+11) = 68$$

$\not\parallel$ keine lineare Abbildung.

Achtung: manchmal sagt man zu Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto bx+d$ „lineare Funktionen", wir würden im Kontext der linearen Algebra sowas „affin linear" nennen...

Tragischerweise ist affin linear nicht linear.

Proposition. Seien V, W zwei K-Vektorräume, $F: V \to W$.
Dann ist F genau dann linear, wenn für alle $u, v \in V$ und für $\alpha \in K$ gilt, dass

$$F(u+\alpha v) = F(u) + \alpha F(v)$$

Beweis "$\Rightarrow$": $F(u+(\alpha v)) = F(u) + F(\alpha v) = F(u) + \alpha F(v)$ ✓

"$\Leftarrow$": $F(u+v) = F(u + 1 \cdot v) = F(u) + 1 \cdot F(v) = F(u) + F(v)$

$F(\alpha v) = F(0 + \alpha v) = F(0) + \alpha F(v) =$

~~$= F(\underset{\in K}{0} \cdot \underset{\in V}{0}) + \alpha F(v) =$~~

$$\left(\begin{aligned} F(0) = F(0+0) &= F(0) + F(0) \quad \Big| - F(0) \\ 0 &= F(0) \end{aligned} \right)$$

$= 0 + \alpha F(v) = \alpha F(v)$ $\square$

Bemerkung. Wenn das zu unsymmetrisch ist:
F linear $\Leftrightarrow$ $\forall u, v \in V \ \forall \alpha, \beta \in K: \ F(\alpha u + \beta v) = \alpha F(u) + \beta F(v)$

Beweis ginge etwas länger...

Satz 2-1. Sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$. Dann ist die Abbildung

$F_A : K^n \to K^m;\ x \mapsto A\cdot x$ eine lineare Abbildung,
sie heißt die „durch A bezüglich der Standardbasis dargestellte lineare Abbildung."

<u>Bemerkung</u> Was Standardbasen mit diesem Satz zu tun haben, sehen wir erst später.

<u>Beweis</u>. Seien $x, y \in K^n$, $\alpha \in K$. Dann gilt

$$F_A(x+\alpha y) = A\cdot(x+\alpha y) \underset{\substack{\text{distr. Ges.}\\ \text{d. Mat. Mult}}}{=} A\cdot x + A(\alpha y) \underset{\substack{\alpha \text{ ist}\\ \text{Skalar}}}{=} Ax + \alpha\cdot(Ay) = F_A(x) + \alpha F_A(y).$$

$\square$

<u>Bemerkung</u>. $A \ldots m\times n$, $x \ldots n\times 1$ $\Longrightarrow$ $A\cdot x \ldots m\times 1$ $\Longrightarrow$ $F_A(x) \in K^m$.

<u>Beispiele</u>. 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

$$F_A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y-z \end{pmatrix}$$

(die kennen wir schon)

3) $C^\infty[-1,1] = \{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f$ ist beliebig oft differenzierbar$\}$.

$D : C^\infty[-1,1] \to C^\infty[-1,1]; \quad f \mapsto f'$ (Ableitung)

Wir (sollten) wissen:

$$D(f+g) = D(f) + D(g) \qquad f,g \in C^\infty[-1,1]$$
$$D(\alpha f) = \alpha D(f) \qquad f \in C^\infty[-1,1]; \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ Differenzieren ist lineare Abbildung.

4) $C[-1,1] = \{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig} \}$

$I : C[-1,1] \to \mathbb{R}; \quad I(f)(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$

Wir (glauben zu) wissen:

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$
$$I(\alpha f) = \alpha I(f)$$

Bilden einer Stammfunktion ist eine lineare Abbildung

Bsp 3 & 4 waren nicht in voller Allgemeinheit formuliert.

Beweisen sollen das andere LV.

5) Sei K ein Körper; $K^{\mathbb{N}_0} = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid a_n \in K \}$

Folgen mit Elementen aus K

$\sigma : K^{\mathbb{N}_0} \to K^{\mathbb{N}_0}$, $\sigma(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$

$$\left(\sigma\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \right) = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} \right)$$

Beh.: σ ist linear

$$\sigma\left(\alpha (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} + \beta (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \right) = \sigma\left((\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \right) =$$

$$= (\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} = \alpha \cdot (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} + \beta (b_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

$$= \alpha \sigma\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \right) + \beta \sigma\left((b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \right) \checkmark$$

σ heißt „Links-Shift"

Satz 2.2. (Eigenschaften linearer Abbildungen) Seien V, W K-Vektorräume, $F: V \to W$ linear. Dann gilt

1) $F(0) = 0$
2) Sei $(w_i)_{i\in I}$ linear unabhängiges System in W und $(v_i)_{i\in I}$ mit $F(v_i) = w_i$. Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.
3) Sei $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig und $w_i = F(v_i)$. Dann ist $(w_i)_{i\in I}$ l. a.
4) Sei $U \leq V$ und $F(U) = \{F(u) \mid u \in U\}$. Dann ist $F(U) \leq W$
5) Sei $T \leq W$ und $F^{-1}(T) = \{x \in V \mid F(x) \in T\}$, dann gilt $F^{-1}(T) \leq V$.
6) Sei $G: W \to X$ linear (und X ein weiterer K-Vektorraum), dann gilt $G \circ F$ ist linear

Beweis. 1) $F(0_V) = F(0_K \cdot 0_V) = 0_K \cdot F(0_V) = 0_W$

2) Seien $\lambda_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} v_{i_r} = 0$

$$\Longrightarrow F(\lambda_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} v_{i_r}) = F(0) = 0$$
$$= \lambda_{i_1} F(v_{i_1}) + \dots + \lambda_{i_r} F(v_{i_r})$$

$$\Longrightarrow \lambda_{i_1} w_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} w_{i_r} = 0$$

Da die w_i l.u. sind, folgt $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_r} = 0$.

3) Das ist nur 2) in umgedrehter Formulierung. (Kontraposition)

4) Seien $x, y \in F(U)$ und $\alpha, \beta \in K$. Dann gibt es $u, v \in U$ mit $x = F(u)$ und $y = F(v)$.

$$\alpha x + \beta y = \alpha F(u) + \beta F(v) = F(\underbrace{\alpha \underset{\in U}{u} + \beta \underset{\in U}{v}}_{\substack{\in U \\ (\text{weil } U \leq V)}}) \in F(U) \Longrightarrow F(U) \leq W.$$

5) Seien $x, y \in F^{-1}(T)$ und $\alpha, \beta \in K$.

Es gilt $F(\alpha x+\beta y) = \underbrace{\alpha \underbrace{F(x)}_{\in T} + \beta \underbrace{F(y)}_{\in T}}_{\in T} \in T$

$$\Longrightarrow \alpha x+\beta y \in F^{-1}(T)$$

6) Seien $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$.

$$G\circ F(\alpha x+\beta y) = G(F(\alpha x+\beta y)) \overset{F \text{ linear}}{=} G(\alpha F(x)+\beta F(y))$$

$$\overset{G \text{ linear}}{=} \alpha\, G(F(x)) + \beta\, G(F(y)) = \alpha\, (G\circ F(x)) + \beta\, (G\circ F(y))$$

$\square$

<u>Definition</u>. Sei $F: V \to W$ linear. Dann heißt

$$\operatorname{Im} F = F(V) = \{F(x) \mid x \in V\}$$

das Bild von F und

$$\operatorname{Ker} F = F^{-1}(\{0\}) = \{x \in V \mid F(x) = 0\}.$$

der Kern von F

<u>Korollar</u>. Sei $F: V \to W$ linear. Dann sind $\operatorname{Im} F$ ~~und~~ bzw. $\operatorname{Ker} F$ Untervektorräume von W ~~und~~ bzw. V, ~~respectively~~.

Beweis $\{0\} \leq W \Longrightarrow \operatorname{Ker} F \leq V$; $V \leq V \Longrightarrow \operatorname{Im} F \leq W$.

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ $\quad F_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x+y+z.$

$$\operatorname{Ker} F_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\} \leq \mathbb{R}^3.$$

Definition. Sei $F: V \to W$ linear.

1) F heißt auch Homomorphismus
2) Falls F injektiv ist, heißt F auch Monomorphismus.
3) Falls F surjektiv ist, heißt F auch Epimorphismus
4) Falls $V=W$, so heißt F auch Endomorphismus.
5) Falls F bijektiv ist, heißt F auch Isomorphismus.
6) Ein bijektiver Endomorphismus heißt Automorphismus.

Proposition Sei $F: V \to W$ linear. Dann ist F genau dann injektiv (Monomorphismus), wenn $\operatorname{Ker} F = \{0\}$.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei F injektiv.

$\operatorname{Ker} F = \{x \in V \mid F(x) = 0\}$.

Wegen $F(0) = 0$ und der Injektivität folgt aus $F(x)=0$

also $x = 0$,

$\Rightarrow \operatorname{Ker} F = \{0\}$

„$\Leftarrow$" Seien $x, y \in V$ mit $F(x) = F(y)$.
Dann gilt
$$0 = F(x) - F(y) = 1 \cdot F(x) + (-1)F(y) = F(1x + (-1)y) = \\ = F(x-y)$$
$$\Rightarrow \quad x - y \in \operatorname{Ker} F = \{0\} \quad \Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y \qquad \square$$

Proposition Seien V, W zwei K-Vektorräume. Dann ist
$$\operatorname{Hom}_K(V, W) = \{ F : V \to W \mid F \text{ linear} \}$$
ein K-Vektorraum.

Beweis. Es gilt $\operatorname{Hom}_K(V,W) \subseteq \{ F : V \to W \}$ ← K Vektorraum lt. Satz 1.1

1) $N : V \to W; \; x \mapsto 0$ ist lin. Abb.
$$N(\alpha x + \beta y) = 0 = 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = \alpha N(x) + \beta N(y) \qquad ✓$$
$$\Rightarrow \quad N \in \operatorname{Hom}_K(V,W) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Hom}_K(V,W) \neq \emptyset.$$

2) Seien $f, g \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$, $\alpha, \beta \in K$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $\alpha f + \beta g \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$.
Wir müssen also zeigen, dass $\alpha f + \beta g$ linear ist.

Seien also $x, y \in V$ und $\gamma, \delta \in K$.

$$(\alpha f + \beta g)(\gamma x + \delta y) = \alpha f(\gamma x + \delta y) + \beta g(\gamma x + \delta y) =$$

$$= \alpha\left(\gamma f(x) + \delta f(y)\right) + \beta\left(\gamma g(x) + \delta g(y)\right) =$$

$$= \gamma\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) + \delta\left(\alpha f(y) + \beta g(y)\right)$$

$$= \gamma\,(\alpha f + \beta g)(x) + \delta \cdot (\alpha f + \beta g)(y)$$

$\Longrightarrow$ $\alpha f + \beta g$ ist linear $\square$

Beispiel $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$. σ Shift wie oben. $\sigma \circ \sigma = \sigma^2$ ist lin. Abb.

$G = \sigma^2 - \sigma - \mathrm{id}$ ($\mathrm{id}: V \to V$; $x \mapsto x$ ist auch linear)

G ist linear lt. obiger Proposition.

$\operatorname{Ker} G$ ist daher ein UVR von V.

$$\operatorname{Ker} G = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid (\sigma^2 - \sigma - \mathrm{id})((a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = 0 \} =$$

$$= \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid (a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0} - (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} - (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = 0 \} =$$

$$= \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = 0 \}$$

$$= \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mid a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \}$$

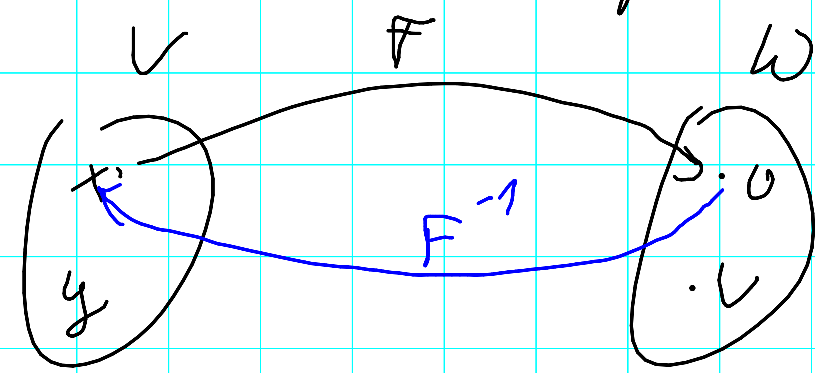
Fibo & Friends

<u>Proposition</u>. Sei $F: V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist auch die Umkehrabbildung $F^{-1}: W \to V$ ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u>. Seien $x, y \in V$, $u, v \in W$ mit

$u = F(x) \iff x = F^{-1}(u)$

$v = F(y) \qquad y = F^{-1}(v)$.



Seien $\alpha, \beta \in K$.

$$F^{-1}(\alpha u + \beta v) = F^{-1}\big(\alpha F(x) + \beta F(y)\big) = F^{-1}\big(F(\alpha x + \beta y)\big)$$
$$= \alpha x + \beta y = \alpha F^{-1}(u) + \beta F^{-1}(v)$$

$\Rightarrow F^{-1}$ ist linear.

Da F bijektiv ist, ist auch F^{-1} bijektiv. $\square$

<u>Satz 2.3. (Dimensionsformel)</u> Sei $F: V \to W$ linear, $\dim V < \infty$, $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von $\operatorname{Ker} F$,

$(w_1, \ldots, w_\ell)$ eine Basis von $\operatorname{Im} F$,
$(u_1, \ldots, u_\ell) \in V$ mit $F(u_j) = w_j$.
Dann ist $(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_\ell)$ eine Basis von V.
Insbesondere gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F.$$

24.11.2009a

Beweis. Beh. $(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_\ell)$ ist l.u.

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in K$ mit

$$(*) \quad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_\ell u_\ell = 0$$

Wende F an:

$$F(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_\ell u_\ell) = F(0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 \underbrace{F(v_1)}_{\substack{\in \operatorname{Ker} F \\ 0}} + \ldots + \alpha_r \underbrace{F(v_r)}_{\substack{\in \operatorname{Ker} F \\ 0}} + \beta_1 \underbrace{F(u_1)}_{w_1} + \ldots + \beta_\ell \underbrace{F(u_\ell)}_{w_\ell} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_\ell w_\ell = 0.$$

Da die $(w_1, \ldots, w_\ell)$ eine Basis von $\operatorname{Im} F$ ist, sind $(w_1, \ldots, w_\ell)$ l.u. $\Longrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\ell = 0$

Wir setzen das in $(*)$ ein und erhalten

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = 0$$

Da $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von Ker F ist, ist $(v_1, \dots, v_r)$ l.u.
und damit $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$
$\Longrightarrow (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_e)$ ist l.u.

<u>Beh</u> $(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_e)$ ist ein Erzeugendensystem von V,
Sei $x \in V$.
Dann ist $F(x) \in \operatorname{Im} F = \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_e\}$
Daher gibt es $\beta_1, \dots, \beta_e \in K$ mit

$$\begin{aligned} F(x) &= \beta_1 w_1 + \dots + \beta_e w_e \\ &= \beta_1 F(u_1) + \dots + \beta_e F(u_e) = \\ &= F(\beta_1 u_1 + \dots + \beta_e u_e) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$F(x - (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_e u_e)) = F(x) - F(\beta_1 u_1 + \dots + \beta_e u_e) = 0.$$

Also

$$x - (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_e u_e) \in \operatorname{Ker} F = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_r\}$$

Daher gibt es Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ mit

$$x - (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_e u_e) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$$

Somit $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_e u_e$
$\Longrightarrow (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_e)$ ist Erzeugendensystem von V

Ablesen der Dimension:

$$\dim V = r + l = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F. \qquad \square$$

<u>Beispiel</u>. Sei $a \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $a \neq 0$ (Zeilenvektor)

$F_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $F_a(x) = a \cdot x$

$\operatorname{Im} F_a = \{ a x ; x \in \mathbb{R}^n \}$

~~Man~~ Wenn $a_j \neq 0$ für ein j, so ist $a \cdot e_j = a_1 \cdot 0 + \ldots + a_{j-1} \cdot 0 + a_j 1 + a_{j+1} 0 + \ldots + a_n 0 = a_j \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} F_a \neq \{0\}$ Da $\operatorname{Im} F_a \leq \mathbb{R}$, gilt $\operatorname{Im} F_a = \mathbb{R}$, also $\dim \operatorname{Im} F_a = 1$.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} F_a = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Im} F_a = n - 1$.

<u>Beispiel zum Beispiel</u>. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$

Daher hat E Dimension $3 - 1 = 2$.

Korollar Seien V, W zwei K-Vektorräume mit $\dim V = \dim W < \infty$ und $F: V \to W$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(1) F ist injektiv („Monomorphismus")

(2) F ist surjektiv („Epimorphismus")

(3) F ist bijektiv („Isomorphismus").

Achtung. Die Voraussetzung $\dim V = \dim W < \infty$ ist wesentlich.

Beweis. $\dim W = \dim V = \dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F$

$$(1) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} F = \{0\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} F = 0 \Leftrightarrow \dim W = \dim \operatorname{Im} F$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} F = W \Leftrightarrow (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Leftrightarrow (2) \\ (1)+(2) \Leftrightarrow (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (1) \Rightarrow (3) \\ (2) \Rightarrow (3) \end{array} \qquad (3) \Rightarrow (1)+(2) \text{ trivial}$$

$\square$

Definition Seien V und W zwei K-Vektorräume. Dann heißen V und W isomorph, wenn es einen Isomorphismus von V nach W gibt.

Bemerkung Zwei isomorphe Vektorräume verhalten sich in allen Belangen der Lin. Alg gleich, z.B.

<u>Proposition</u>. Seien V und W zwei isomorphe K-Vektorräume. Dann gilt $\dim V = \dim W$.

<u>Bemerkung</u> Endlich dim. wurde nicht vorausgesetzt, daher hilft Dimensionsformel nicht.

<u>Beweis der Prop.</u> Sei $F: V \to W$ ein Isomorphismus.
Sei $(w_i)_{i\in I}$ eine Basis von W.
Da F bijektiv ist, gibt es eindeutige $(v_i)_{i\in I}$ mit $F(v_i) = w_i$
Wir behaupten, dass $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis bilden.
Lt Satz 2.2 (2) ist $(v_i)_{i\in I}$ l.u.

Wir zeigen, dass das auch Erz. Syst. ist:
Sei $x \in V$. Dann ist $F(x)$ als endl. Linearkomb.

$$F(x) = \alpha_1 w_{i_1} + \dots + \alpha_r w_{i_r} \qquad \text{für } i_1, \dots, i_r \in I, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$$

darstellbar. Also

$$F(x) = \alpha_1 F(v_{i_1}) + \dots + \alpha_r F(v_{i_r}) =$$
$$= F(\alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_r v_{i_r})$$

Wegen Injektivität von F folgt
$$x = \alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_r v_{i_r}$$
$\square$

Satz 2.4. (Fortsetzungssatz für lin. Abb)

Seien V und W zwei K-Vektorräume, $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(w_i)_{i\in I}$ ein beliebiges System von Elementen von W.

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F: V \to W$, sodass
$$\forall i \in I: \quad F(v_i) = w_i.$$

, lin. Abb. sind durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Beweis. Eindeutigkeit. Annahme $F: V \to W$ linear, $G: V \to W$ linear mit
$$\forall i \in I: \quad F(v_i) = w_i = G(v_i).$$
Sei $x \in V$. Dann können wir x eindeutig in der Form
$$x = \alpha_1 v_{i_1} + \dots + \alpha_r v_{i_r} \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K, \quad i_1, \dots, i_r \in I.$$
darstellen.

$$F(x) = F(\alpha_1 v_{i_1} + \ldots + \alpha_r v_{i_r}) = \alpha_1 \underbrace{F(v_{i_1})}_{\substack{= w_{i_1} \\ = G(v_{i_1})}} + \ldots + \alpha_r \underbrace{F(v_{i_r})}_{\substack{\| \\ G(v_{i_r})}} =$$

$$= \alpha_1 G(v_{i_1}) + \ldots + \alpha_r G(v_{i_r}) =$$
$$= G(\alpha_1 v_{i_1} + \ldots + \alpha_r v_{i_r}) = G(x)$$

26.11.2009

<u>Existenz</u> Wir definieren $F: V \to W$ folgendermaßen:
Wenn $x \in V$, so besitzt x eine eindeutige Darstellung
$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$$
mit passenden $\alpha_i \in K$, nur endlich viele von 0 verschieden.

Wir setzen dann
$$F(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i w_i$$

Damit ist $F: V \to W$ eine Abbildung.

Seien $x, y \in V$, $\lambda, \mu \in K$. Es gibt eind. Darstellungen

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \qquad\qquad y = \sum_{i \in I} \beta_i v_i$$

α_i, β_i sind $\in K$, jeweils nur endl. viele $\neq 0$,

$$\Rightarrow \quad \lambda x + \mu y = \sum_{i \in I} (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) v_i ,$$

wobei nur endlich viele $\lambda \alpha_i + \mu \beta_i \neq 0$.
Das ist die eind. Darst. von $\lambda x + \mu y$ als Linearkomb. der Basis,

$$F(\lambda x + \mu y) = \sum_{i \in I} (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) w_i$$

$$= \lambda \sum_{i \in I} \alpha_i w_i + \mu \sum_{i \in I} \beta_i w_i =$$

$$= \lambda F(x) + \mu F(y) \qquad \square$$

<u>Bemerkung</u>. Vgl. Situation bei Differentiation: mit einer halbwegs überschaubaren Tabelle von Differentiationsregeln kann man schon viele Funktionen differenzieren