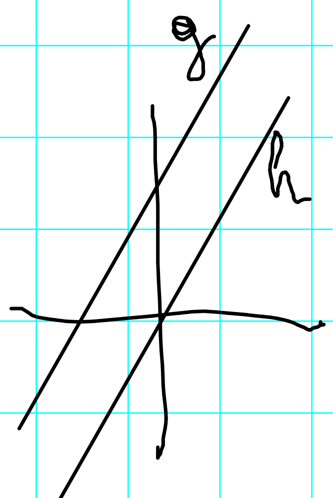
## 2.2. Affine Unterräume

(26.11.2009)

Bei Untervektorräumen ist immer der Nullvektor enthalten.

Allerdings gibt es auch interessante Objekte im $\mathbb{R}^3$, die nicht durch Ursprung gehen, z.B. beliebige Geraden, Ebenen usw.




g ist verschobene Kopie von h.

$F: V \to W$ linear.

$$\ker F = F^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : F(x) = 0\}$$

war ein Untervektorraum. „homogene Gleichung"

Es könnte auch interessant sein, Urbilder von anderen Elementen auszurechnen, also

$$F^{-1}(\{c\}) = \{x \in V : F(x) = c\}$$

„inhomogene Gleichung".

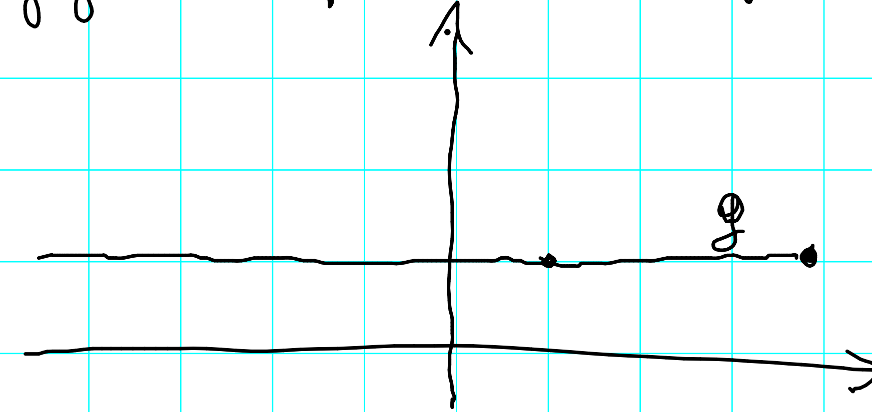
**Definition** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $W \subseteq V$. Dann heißt $W$ ein affiner Unterraum von $V$, wenn es einen Untervektorraum $U$ von $V$ und ein Element $a \in V$

gilt, sodass
$$W = a + U := \{a+u \mid u \in U\}$$

<u>Bemerkung</u>. 1) Das ist also Verschiebung des UVR $U$ um den Vektor $a$.

2) Ein affiner Unterraum muss nicht unbedingt ein Untervektorraum sein. (gegen die sprachliche Vernunft)

<u>Beispiel</u>.
$$g = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix}26\\1\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix}11\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$$




<u>Proposition</u> Sei $W = a + U$ ein affiner Unterraum des $K$-Vektorraums $V$ ($a \in V$, $U \leq V$) und $b \in V$, $\tilde{U} \leq V$ mit
$$a + U = b + \tilde{U}$$
Dann gilt $\tilde{U} = U$ und $b \in W$.
Ist umgekehrt $d \in W$, so gilt auch

$$W = d + U.$$

<u>Beweis</u>

Da $b = b + 0$ und $0 \in \tilde{U}$, gilt $b \in b + \tilde{U} = a + U$, also gibt es ein $u_0 \in U$ mit $b = a + u_0 \Rightarrow a - b = -u_0 \in U$

Da $a = a + 0$ und $0 \in U$, gilt $a \in a + U = b + \tilde{U}$, also gibt es ein $\tilde{u}_0 \in \tilde{U}$ mit $a = b + \tilde{u}_0 \Rightarrow b - a = -\tilde{u}_0 \in \tilde{U}$

Sei $u \in U$. Dann gibt es ein $\tilde{u} \in \tilde{U}$ mit

$$a + u = b + \tilde{u},$$

also

$$u = \underbrace{b - a}_{\in \tilde{U}} + \underbrace{\tilde{u}}_{\in \tilde{U}} \in \tilde{U}.$$

Sei umgekehrt $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Dann gibt es ein $u \in U$ mit

$$b + \tilde{u} = a + u,$$

also

$$\tilde{u} = \underbrace{a - b}_{\in U} + \underbrace{u}_{\in U} \in U$$

$\Rightarrow U = \tilde{U}$. Wir wissen schon $b \in a + U = W$.

Sei jetzt $d \in W$, also $d = a + u_1$ für ein $u_1 \in U$.
Dann gilt

$$d + U = \{d + u \mid u \in U\} = \{a + u_1 + u \mid u \in U\}$$

$$\underbrace{\phantom{xxxx}}_{\in U}$$

$$\subseteq a+U = W.$$

Umgekehrt

$$a+U = \{a+u \mid u \in U\} = \{d \underbrace{-a_1 + u}_{\in U} \mid u \in U\} \subseteq d+U.$$

$$\Rightarrow a+U = d+U. \qquad \square$$

<u>Satz 2.5</u> Sei $F: V \to W$ linear, $c \in \operatorname{Im} F$. Dann ist

$$F^{-1}(\{c\}) = \{x \in V \mid F(x) = c\}$$

ein affiner Unterraum von $V$ und für jedes $x_0$ mit $F(x_0) = c$ gilt

$$F^{-1}(\{c\}) = x_0 + \operatorname{Ker} F.$$

<u>Bemerkung</u> Zu $x_0$ sagt man: eine partikuläre (bzw. speziell) Lösung der inhomogenen Gleichung $F(x) = c$

zu jedem Element von $\operatorname{Ker} F$ sagt man Lösung der homogenen Gleichung.

„allgemeine Lösung der inhomog. Glg = partikuläre Lösung + Lösung der homog. Glg."

**Beweis Satz 2.5** Sei $x_0 \in F^{-1}(\{c\})$. Dann gilt

$$F(x) = c \iff F(x) = F(x_0) \iff F(x - x_0) = 0$$
$$\iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} F$$
$$\iff x \in x_0 + \operatorname{Ker} F.$$

$$\Rightarrow F^{-1}(\{c\}) = x_0 + \operatorname{Ker} F. \qquad \square$$

30.11.2009

**Definition.** Sei $W = a + U$ ein affiner Unterraum von einem $K$-Vektorraum $V$. Dann definiere $\dim W$ als $\dim U$.
Wenn $\dim W = 1$, so heißt $W$ eine Gerade.
Wenn $\dim W = \dim V - 1$ und $\dim V < \infty$, so heißt $W$ eine Hyperebene.

**Bem.** Im $\mathbb{R}^3$: Hyperebene = Ebene
$\mathbb{R}^2$: Hyperebene = Gerade
} besitzen Normalform $ax + by + cz = d$
$ax + by = c$

sonst: Hyperebene ist halt Hyperebene.

(also als Urbild von $d$ bzw. $c$ unter der lin Abb, die durch $(a\ b\ c)$ bzw. $(a\ b)$ induziert wird)

Hyperebenen sind also Lösungen von lin Glg

$$F(x) = c,$$

wobei $F: V \to K$ linear und $F \neq 0$ und $c \in K$.

(Dimensionsformel.

$$\dim \operatorname{Ker} F = \dim V - \underbrace{\dim \operatorname{Im} F}_{=1}$$

)