

2.3. Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Wir haben gesehen, dass jede Matrix $M \in K^{m \times n}$ eine lin. Abb. $F_M: K^n \rightarrow K^m$ mit $F(x) = M \cdot x$ induziert,

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass jede lin. Abb. zwischen zwei **endlich-dim** K -Vektorräumen durch eine Matrix dargestellt werden kann.

Bem. $P_3 = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 3 \}$

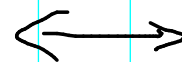
$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

Addition in P_3

Skalarmult.:

Kult. von Polynomen

Basis $(1, X, X^2, X^3)$



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in K^4$$



Addition in K^4



Skalarmult. in K^4

keine Entsprechung.



(e_1, e_2, e_3, e_4) Standardbasis

Definition (Koordinatenabb.) Sei V ein endl. dim K -Vektorraum, $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dann definieren

$$\Phi_B : K^n \rightarrow V; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

„Koordinatenabbildung bzgl. der Basis B “

Bemerkung Die Reihenfolge der Basisvektoren ist jetzt wesentlich:

$$B = (1, X, X^2, X^3) \quad \text{Basis von } \mathbb{P}_3$$

$$A = (X^3, X^2, X, 1) \quad \text{--- 1 ---}$$

$$\Phi_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \neq \quad \Phi_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot X^3$$

Satz 2.6 (Koordinatenabbildung), Sei Φ_B eine Koordinatenabbildung wie oben. Dann ist Φ_B ein Isomorphismus

Beweis 1) Φ_B ist linear:

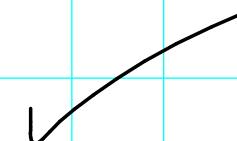
$$\Phi_B \left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) = \Phi_B \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \right) \quad \left(\alpha x_1 + \beta y_1 \right)$$

$$= (x_1 + y_1)v_1 + \dots + (x_n + y_n)v_n$$

$$= (x_1v_1 + \dots + x_nv_n) + (y_1v_1 + \dots + y_nv_n)$$

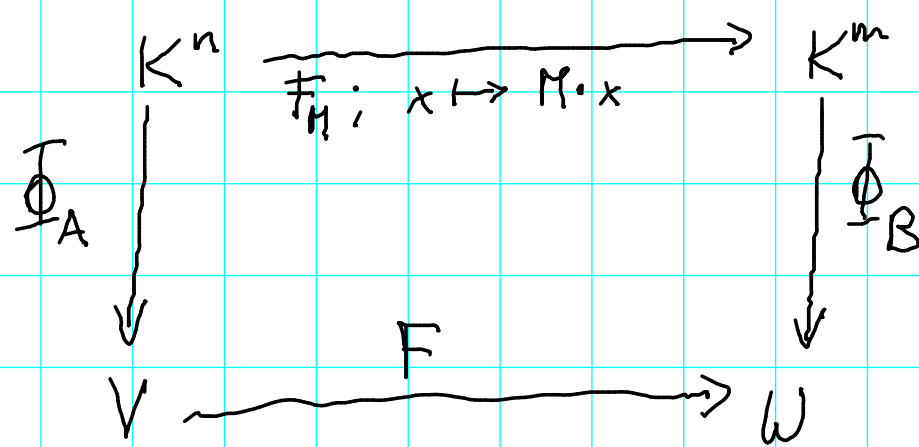
$$= \underbrace{\alpha}_{\beta} \underbrace{\mathbb{1}}_{\sim B} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{\beta}_{\sim B} \underbrace{\mathbb{1}}_{\sim B} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$



2) jedes $w \in W$ lässt sich (lt. Satz über Charakt. von Basen) eindeutig als Linearkomb. $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ schreiben, also eindeutig als $w = \underbrace{\mathbb{1}}_B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ schreiben. □

Satz 2.7. (Matrixdarstellung linearer Abbildungen) Seien V und W endl.-dim

K -Vektorräume, $F: V \rightarrow W$ linear, $A = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , $B = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W . Dann gibt es genau eine Matrix $M \in K^{m \times n}$, sodass das Diagramm



kommutiert, d.h., $F \circ \Phi_A = \Phi_B \circ F_M$.

Wenn die Elemente t_{jk} mit $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$ durch

$F(v_k) = t_{1k} w_1 + \dots + t_{mk} w_m$
 eindeutig bestimmt sind, so gilt

$$M = \left(t_{jk} \right)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} = \begin{pmatrix} t_{11} & \boxed{t_{12}} & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{m1} & \boxed{t_{mk}} & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Koordinaten von $F(v_k)$.

„Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren.“

Beweis. Zur Eindeutigkeit: $F \circ \Phi_A = \Phi_B \circ F_M$.

Setze $x = e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ $\Phi_A(e_k) = 1 \cdot v_k$

$$F(\Phi_A(e_k)) = F(v_k) = t_{1k} w_1 + \dots + t_{mk} w_m.$$

Sei $M = (s_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ Dann gilt $F_M(e_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1k} \\ \vdots \\ s_{mk} \end{pmatrix}$

$$\Phi_B(F_M(e_k)) = s_{1k} w_1 + \dots + s_{mk} w_m.$$

Da $F \circ \Phi_A(e_k) = \Phi_B \circ F_M(e_k)$, folgt

$$s_{1k} w_1 + \dots + s_{mk} w_m = t_{1k} w_1 + \dots + t_{mk} w_m$$

Da (w_1, \dots, w_m) eine Basis von W ist und daher jedes Element eindeutig als Linearkombination der Basiselemente darstellbar werden kann, folgt

$$s_{1k} = t_{1k}, \dots, s_{mk} = t_{mk}, \text{ also } s_{jk} = t_{jk}, \text{ \u2013\u2013\u2013, \u2013\u2013\u2013}$$

, $D \text{ S d d } K \text{ s d } K \text{ d } B \text{ d } B''$ gewählt

Existenz. Wir setzen M wie oben suggeriert als $(t_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$

Das ist jedenfalls eine Matrix der richtigen Größe.

Daher $F_M: K^n \rightarrow K^m; x \mapsto Mx$ eine lin. Abb., somit ist auch $\Phi_B \circ F_M: K^n \rightarrow W$ eine lin. Abb.

Wir müssen zeigen, dass $\Phi_B \circ F_M = F \circ \Phi_A$.

Nach dem Fortsetzungssatz für lin. Abb. (Satz 2.4) reicht es zu zeigen, dass die beiden lin. Abb. auf einer Basis von K^n übereinstimmen. Wir wählen natürlich die Standardbasis des K^n .

Wir wissen bereits

$$\begin{aligned} F(\Phi_A(e_j)) &= t_{1j} \omega_1 + \dots + t_{mj} \omega_m \\ \Phi_B(F_M(e_j)) &= t_{1j} \omega_1 + \dots + t_{mj} \omega_m \end{aligned} \quad \text{folgt wie oben}$$

$$\Rightarrow F(\Phi_A(e_j)) = \Phi_B(F_M(e_j))$$

✓ □

Bemerkung

Die Wahl der Basen beeinflusst die darstellende Matrix.

Definition. Mit den Notationen aus Satz 2.7 heißt M die die Abbildung F bezüglich der Basen A und B darstellende Matrix.

Bemerkung Man findet dafür diverse Notationen, z.B. $M_A^B(F)$

Beispiel. $V = P_3$ $A = (1, X, X^2, X^3)$
 $W = P_2 = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 2\}$ $B = (1, X, X^2)$
 $D: V \rightarrow W; \quad a + bX + cX^2 + dX^3 \mapsto b + 2cX + 3dX^2$

Gesucht: Dargest. Matrix bzgl. gegebener Basen A und B .

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2$$

$$D(X) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2$$

$$D(X^2) = 2X = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2$$

$$D(X^3) = 3X^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 3 \cdot X^2$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sei jetzt $v = 30 + 11X + 20X^2 + 09X^3$ $D(v) = 11 + 40X + 27X^2$

oder (warum einfach / wenn's kompliziert und geht?)

$$\Phi_A^{-1}(v) = \begin{pmatrix} 30 \\ 11 \\ 20 \\ 09 \end{pmatrix} = :x$$

$$M \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 11 \\ 20 \\ 09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \cdot 20 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\Phi}_B(Mx) = 11 + 40X + 27X^2$$

Was passiert bei Hintereinander ausführung zweier linearer Abbildungen?

Satz 2.8.

Seien U, V, W drei endl. dim. K -Vektorräume, $A = (u_1, \dots, u_p)$, $B = (v_1, \dots, v_n)$, $C = (w_1, \dots, w_m)$, $F: U \rightarrow V$ linear, $G: V \rightarrow W$ linear mit darst. Matrizen bzgl. der eben angegebenen Basen $MEK^{n \times p}$ bzw. $NEK^{m \times n}$. Dann ist die Matrixdarstellung von $G \circ F$ bzgl. der Basen A und C durch

$$N \cdot M$$

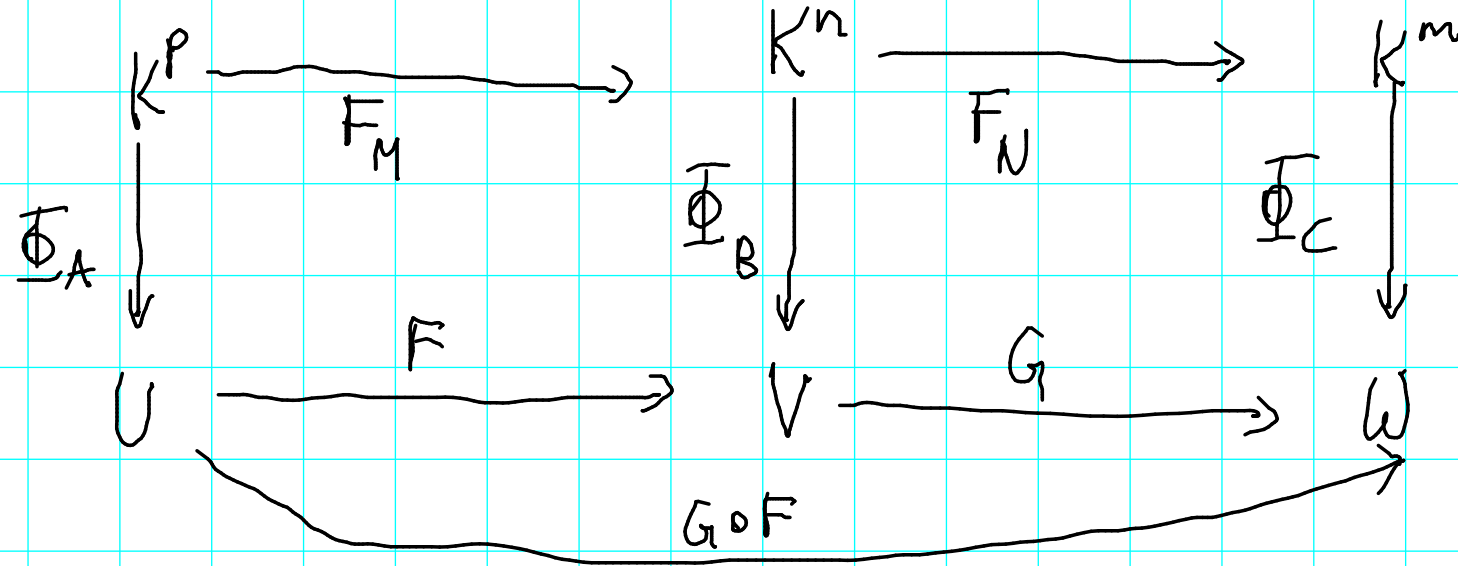
gegeben.

Beweis. (diagram chasing)

F_L



$L \dots$ darst. Mat.
von $G \circ F$.



$$F \circ \Phi_A = \Phi_B \circ F_M$$

$$G \circ \Phi_B = \Phi_C \circ F_N$$

$$(G \circ F) \circ \Phi_A = G \circ (F \circ \Phi_A) = G \circ (\Phi_B \circ F_M) = (G \circ \Phi_B) \circ F_M =$$

$$= (\Phi_C \circ F_N) \circ F_M = \Phi_C \circ (F_N \circ F_M)$$

Wir suchen also eindeutige Matrix L mit

$$F_L = F_N \circ F_M$$

$$(F_N \circ F_M)(x) = F_N(F_M(x)) = F_N(Mx) = N \cdot (Mx) \stackrel{\uparrow}{=} (N \cdot M)x = F_L(x) = L \cdot x$$

Matrizen multipl. assoz.

$$\Rightarrow L = N \cdot M.$$

□

Bemerkung Man hätte das auch durch Induktion machen können.

Be. Hintereinanderausführung linearer Abb entspricht Multiplikation der darstellenden Matrizen.

Bemerkung Wenn F ein Endomorphismus des VR V ist, also $F: V \rightarrow V$ linear, so kann es vorteilhaft sein, zweimal dieselbe Basis B von V zu wählen. Man spricht dann von der Matrixdarstellung von F bzgl der Basis B .
Statt „Bzgl. der Basen B und B “.

Die Matrixdarstellung hängt immer von der gewählten Basis ab? \updownarrow