2.3. Matrixdarstellungen linearer Abbildungen

Wir haben gesehen, dass jede Matrix $M \in K^{m \times n}$ eine lin. Abb. $F_M : K^n \to K^m$ mit $F(x) = M \cdot x$ induziert.

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass jede lin. Abb. zwischen zwei endlich-dim. K-Vektorräumen durch eine Matrix dargestellt werden kann.

Bem. $P_3 = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 3 \}$

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in K^4$$

Addition in P_3 $\longleftrightarrow$ Addition in K^4

Skalarmult. $\longleftrightarrow$ Skalarmult in K^4

Mult. von Polynomen — keine Entsprechung.

Basis $(1, X, X^2, X^3)$ $\longleftrightarrow$ (e_1, e_2, e_3, e_4) Standardb.

Definition (Koordinatenabb.) Sei V ein endl. dim. K-Vektorraum, $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann definiere

$$\Phi_B : K^n \longrightarrow V; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n .$$

„Koordinatenabbildung bzgl. der Basis B"

Bemerkung Die Reihenfolge der Basiselemente ist jetzt wesentlich:

$B = (1, X, X^2, X^3)$ Basis von P_3

$A = (X^3, X^2, X, 1)$ — " —

$$\Phi_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq \Phi_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot X^3$$

Satz 2.6 (Koordinatenabbildung). Sei Φ_B eine Koordinatenabbildung wie oben. Dann ist Φ_B ein Isomorphismus

Beweis 1) Φ_B ist linear:

$$\Phi_B \left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) = \Phi_B \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\ldots \begin{pmatrix}x_n\end{pmatrix} \begin{pmatrix}y_n\end{pmatrix}\Big) \qquad \begin{pmatrix}\vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n\end{pmatrix}$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n$$

$$= (\alpha x_1 v_1 + \ldots + \alpha x_n v_n) + (\beta y_1 v_1 + \ldots + \beta y_n v_n)$$

$$= \alpha \Phi_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \Phi_B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2) Jedes $w \in W$ lässt sich (lt Satz über Charakt. von Basen) eindeutig als Linearkomb. $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ schreiben, also eindeutig als $w = \Phi_B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\square$

<u>Satz 2.7. (Matrixdarstellung linearer Abbildungen)</u> Seien V und W endl.-dim K-Vektorräume, $F: V \to W$ linear, $A = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, $B = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Dann gibt es genau eine Matrix $M \in K^{m \times n}$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "F_M:\ x \mapsto M\cdot x"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_B"] \\ V \arrow[r, "F"] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h., $\quad F \circ \Phi_A = \Phi_B \circ F_M$.

Wenn die Elemente t_{jk} mit $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$ durch

$$F(v_k) = t_{1k}\, w_1 + \ldots + t_{mk}\, w_m$$

eindeutig bestimmt sind, so gilt

$$M = \left(t_{jk}\right)_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1 \leq k \leq n}} = \begin{pmatrix} t_{11} & \boxed{\begin{matrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{mk} \end{matrix}} & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Koordinaten von $F(v_k)$.

„Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren."

Beweis. Zur Eindeutigkeit: $F \circ \Phi_A = \Phi_B \circ F_M$.

Setze $x = e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$ $\qquad \Phi_A(e_k) = 1 \cdot v_k$

$$F(\Phi_A(e_k)) = F(v_k) = t_{1k} w_1 + \dots + t_{mk} w_m.$$

Sei $M = (s_{jk})_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n}}$. Dann gilt $F_M(e_k) = \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1k} \\ \vdots \\ s_{mk} \end{pmatrix}$

$$\Phi_B(F_M(e_k)) = s_{1k} w_1 + \dots + s_{mk} w_m.$$

Da $F \circ \Phi_A(e_k) = \Phi_B \circ F_M(e_k)$, folgt

$$s_{1k} w_1 + \dots + s_{mk} w_m = t_{1k} w_1 + \dots + t_{mk} w_m$$

Da $(w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W ist und daher jedes Element eindeutig als Linearkombination der Basiselemente dar gestellt werden kann, folgt

$s_{1k} = t_{1k}, \dots, s_{mk} = t_{mk}$, also $s_{jk} = t_{jk}$, Eind. +

„DSddMsdKdBdB" gezeigt

<u>Existenz</u>. Wir setzen M wie oben suggeriert als $\left(t_{jk}\right)_{\substack{1\leq j\leq m\\ 1\leq k\leq n}}$

Das ist jedenfalls eine Matrix der richtigen Größe.
Daher $F_M : K^n \to K^m;\ x \mapsto Mx$ eine lin. Abb., somit ist auch
$\Phi_B \circ F_M : K^n \to W$ eine lin. Abb.

Wir müssen zeigen, dass $\Phi_B \circ F_M = F \circ \Phi_A$.
Nach dem Fortsetzungssatz für lin. Abb. (Satz 2.4) reicht es zu zeigen, dass die beiden lin. Abb. auf einer Basis von K^n über- einstimmen. Wir wählen natürlich die Standardbasis des K^n.
Wir wissen bereits

$$F\left(\Phi_A(e_k)\right) = t_{1k} w_1 + \dots + t_{mk} w_m$$

$$\Phi_B\left(F_M(e_k)\right) = t_{1k} w_1 + \dots + t_{mk} w_m \quad \text{folgt wie oben}$$

$$\Longrightarrow \quad F\left(\Phi_A(e_k)\right) = \Phi_B\left(F_M(e_k)\right) \quad ✓ \quad \square$$

<u>Bemerkung</u> Die Wahl der Basen beeinflusst die darstellende Matrix.

Definition. Mit den Notationen aus Satz 2.7 heißt M die die Abbildung F bezüglich der Basen A und B darstellende Matrix.

Bemerkung Man findet dafür diverse Notationen, z.B. $\mathcal{M}_A^B(F)$

Beispiel. $V = P_3$ $\qquad A = (1, X, X^2, X^3)$

$W = P_2 = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 2 \}$ $\qquad B = (1, X, X^2)$

$D: V \to W; \quad a + bX + cX^2 + dX^3 \longmapsto b + 2cX + 3dX^2.$

Gesucht: Darst. Matrix bzgl. gegebener Basen A und B.

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 0 X^2.$$
$$D(X) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 X + 0 X^2$$
$$D(X^2) = 2X = 0 \cdot 1 + 2 \cdot X + 0 \cdot X^2$$
$$D(X^3) = 3X^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot X + 3 \cdot X^2$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sei jetzt $v = 30 + 11X + 20X^2 + 09X^3$. $\qquad D(v) = 11 + 40X + 27X^2$

oder (warum einfach, wenn's kompliziert auch geht?)

$$\Phi_A^{-1}(v) = \begin{pmatrix} 30 \\ 11 \\ 20 \\ 09 \end{pmatrix} =: x$$

$$M\cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 11 \\ 20 \\ 09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2\cdot 20 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 40 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi_B(Mx) = 11 + 40X + 27X^2.$$

Was passiert bei Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen?

Satz 2.8. Seien U, V, W drei endl. dim K-Vektorräume, $A = (u_1, \dots, u_p)$, $B = (v_1, \dots, v_n)$, $C = (w_1, \dots, w_m)$, $F: U \to V$ linear, $G: V \to W$ linear mit darst. Matrizen bzgl. der eben angegebenen Basen $M \in K^{n\times p}$ bzw $N \in K^{m\times n}$. Dann ist die Matrixdarstellung von $G\circ F$ bzgl. der Basen A und C durch

$$N\cdot M$$

gegeben.

Beweis. (diagram chasing)

F_L

$L \dots$ darst. Mat. von $G\circ F$.

$$
\begin{tikzcd}
K^p \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & K^n \arrow[r, "F_N"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_C"'] \\
U \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G \circ F"'] & V \arrow[r, "G"] & W
\end{tikzcd}
$$

$$F \circ \Phi_A = \Phi_B \circ F_M$$
$$G \circ \Phi_B = \Phi_C \circ F_N$$

$$(G \circ F) \circ \Phi_A = G \circ (F \circ \Phi_A) = G \circ (\Phi_B \circ F_M) = (G \circ \Phi_B) \circ F_M =$$
$$= (\Phi_C \circ F_N) \circ F_M = \Phi_C \circ (F_N \circ F_M)$$

Wir suchen also eindeutige Matrix L mit

$$F_L = F_N \circ F_M$$

$$(F_N \circ F_M)(x) = F_N(F_M(x)) = F_N(Mx) = N \cdot (Mx) \underset{\uparrow}{=} (N \cdot M)\, x = F_L(x) = L \cdot x$$

Matrizenmultipl. assoz.

$\Rightarrow L = N \cdot M.$ $\square$

Bemerkung Man hätte das auch durch Indexschlacht machen können.

Also. Hintereinanderausführung linearer Abb entspricht Multiplikation der darstellenden Matrizen.

Bemerkung Wenn F ein Endomorphismus des VR V ist, also $F: V \to V$ linear, so kann es vernünftig sein, zweimal dieselbe Basis B von V zu wählen. Man spricht dann von der

Matrixdarstellung von F bzgl der Basis B.

statt „bzgl. der Basen B und B".

Die Matrixdarstellung hängt immer von der gewählten Basis ab!