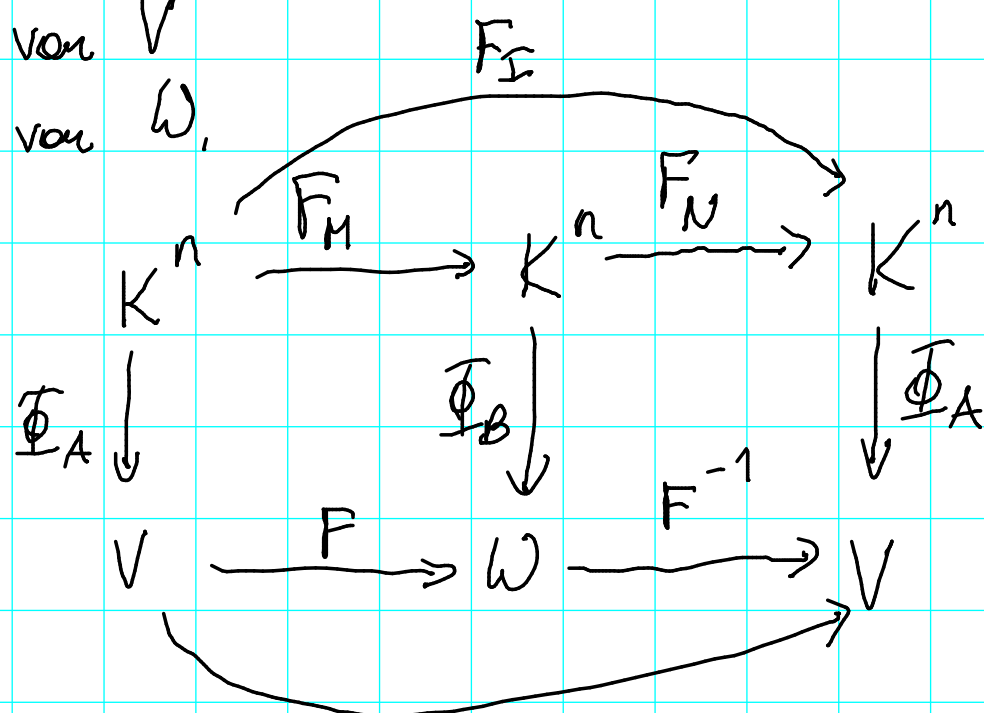


2.4. Inverse Matrizen.

Sei $F: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus. Dann ist auch F^{-1} ein Isomorphismus.

A ... Basis von V

B ... Basis von W .



Es gilt $\dim V = \dim W$.

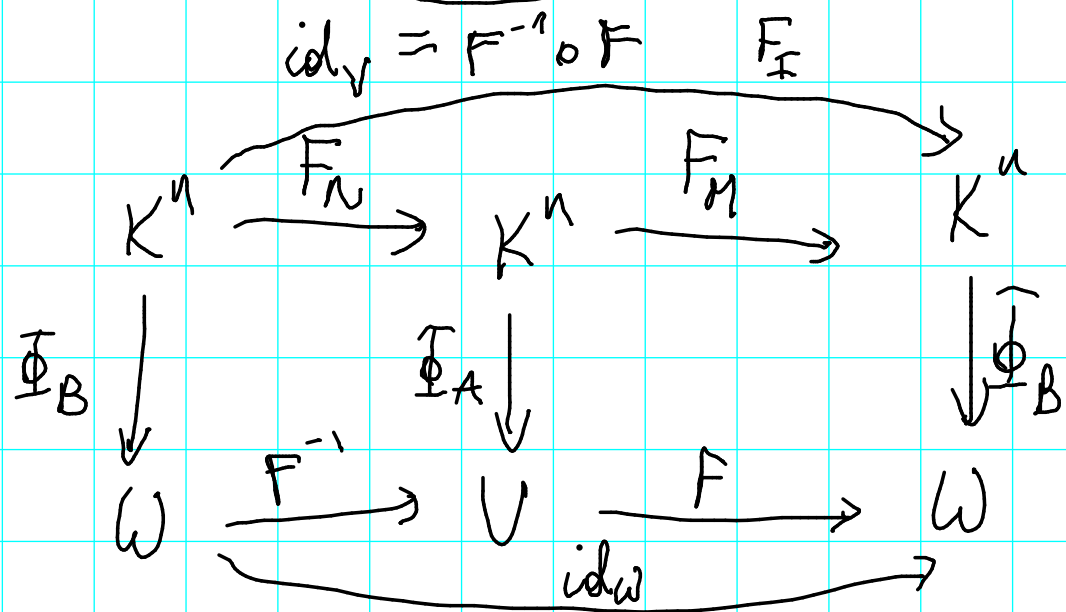
Annahme: $\dim V = \dim W = n < \infty$

M darst. Matrix von F

N darst. Matrix von F^{-1}

$\Rightarrow I$ darst. Matrix von id_V .

$$\Rightarrow I = N \cdot M$$



$$\Rightarrow I = M \cdot N.$$

Definition. Eine Matrix $M \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn M die darstellende Matrix eines Isomorphismus ist.

Satz 2.8. (Charakterisierung invertierbarer Matrizen) Sei $M \in K^{n \times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) M ist invertierbar
- 2) Es gibt ein $N \in K^{n \times n}$ mit $M \cdot N = \bar{I}$
- 3) Es gibt ein $N \in K^{n \times n}$ mit $N \cdot M = \bar{I}$
- 4) Es gibt ein $N \in K^{n \times n}$ mit $M \cdot N = N \cdot M = \bar{I}$

Weiters ist die Matrix N in den Punkten 2)–4) jeweils eindeutig bestimmt.

Beweis 1) \Rightarrow 4) siehe obige Überlegungen

4) \Rightarrow 2) trivial

4) \Rightarrow 3) —//—

2) \Rightarrow 1) Wegen $M \cdot N = \bar{I}$ gilt $F_{\bar{I}} = F_{M \cdot N} = F_M \circ F_N = \text{id}$

\Rightarrow Daher ist F_M surjektiv $\left(\forall y \in K^n: F_M(F_N(y)) = y \right)$
 $F_M: K^n \rightarrow K^n$ linear

$\Rightarrow F_M$ ist bijektiv $\Rightarrow F_M$ ist Isomorphismus,
 $\Rightarrow M$ ist darst. Matrix eines Isomorphismus. $\Rightarrow M$ invertierbar.

3) \Rightarrow 1) w.o. erhalten wir $F_N \circ F_M = \text{id}$.
 \Rightarrow Daher ist F_M injektiv (Wenn $F_M(x) = F_M(y)$, so folgt
 $x = F_N(F_M(x)) = F_N(F_M(y)) = y$)
 $\Rightarrow F_M$ ist bijektiv; weiter wie oben.

Zur Eindeutigkeit: In 2,3,4 ist immer F_M bijektiv und
 $F_N \circ F_M = F_M \circ F_N = \bar{F} = \text{id}$, d.h. F_N ist die zu F_M inverse
 Abb. Die ist eindeutig. Ihre Matrixdarst N ist eind., $\Rightarrow N$ ist eindeutig.

Alternativ: einfaches Nachrechnen:

z.B. $L_1 M = \bar{I} \quad MR = I,$

$L_2 M = \bar{I}$

$L_1 = L_1 \cdot \bar{I} = L_1(MR) = (L_1 M)R = \bar{I}R = R = \bar{I}R = L_2(MR) = L_2 \bar{I} = L_2$

$\Rightarrow L_1 = L_2 = R$

alles eindeutig. \square

Definition

Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Die eindeutige Matrix B mit
 $AB = BA = \bar{I}$

heißt die zu A inverse Matrix und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über K wird mit

bezeichnet. $GL_n(K) = \{ A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar} \}$
„general linear group“

Satz 1.9. (Rechen mit Inversen). Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in GL_n(K)$.

Dann gilt

1) $A \cdot B$ ist invertierbar (also $AB \in GL_n(K)$) und es gilt
 $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

2) $A^{-1} \in GL_n(K)$ und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$

3) $I \in GL_n(K)$ und es gilt $I^{-1} = I$

4) $GL_n(K)$ ist eine Gruppe (also innere Verkn., assoziativ, neut. \mathbb{E} , inv. \mathbb{E}).

5) $A^t \in GL_n(K)$ und es gilt

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

(Transposition)

Beweis 1) $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$

$B^{-1}A^{-1}$ tut das Gewünschte und die Eind. der Inversen bringt den Rest.

2) $(A^{-1}) \cdot A = I$

$$\Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$$

3)

$$I \cdot I = I$$

4)

Assoc. gesetz geerbt; Rest ist 1, 3, 2.

5)

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t = I^t = I.$$

Rechenregel für Transp.



Lösung

Alle Matrizen in diesem Abschnitt waren quadratisch.
Für nicht-quadratische Matrizen $\in K^{m \times n}$ mit $m \neq n$
kann alles schiefgehen.