2.4. Inverse Matrizen.

Sei $F: V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist auch F^{-1} ein Isomorphismus.

A ... Basis von V

B ... Basis von W.

Es gilt $\dim V = \dim W$.

Annahme: $\dim V = \dim W = n < \infty$

M darst. Matrix von F

N darst. Matrix von F^{-1}

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "F_M"] \arrow[rr, bend left, "F_I"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & K^n \arrow[r, "F_N"] \arrow[d, "\Phi_B"] & K^n \arrow[d, "\Phi_A"] \\
V \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "id_V = F^{-1} \circ F"'] & W \arrow[r, "F^{-1}"] & V
\end{tikzcd}
$$

$\Longrightarrow$ I darst Matrix von id_V.

$\Longrightarrow$ $I = N \cdot M$

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "F_N"] \arrow[rr, bend left, "F_I"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & K^n \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "\Phi_A"] & K^n \arrow[d, "\Phi_B"] \\
W \arrow[r, "F^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "id_W"'] & V \arrow[r, "F"] & W
\end{tikzcd}
$$

$\Longrightarrow$ $I = M \cdot N$.

Definition. Eine Matrix $M \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar, wenn M die darstellende Matrix eines Isomorphismus ist.

Satz 2.8. (Charakterisierung invertierbarer Matrizen) Sei $M \in K^{n \times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) M ist invertierbar
2) Es gibt ein $N \in K^{n \times n}$ mit $M \cdot N = I$
3) Es gibt ein $N \in K^{n \times n}$ mit $N \cdot M = I$
4) Es gibt ein $N \in K^{n \times n}$ mit $M \cdot N = N \cdot M = I$

Weiters ist die Matrix N in den Punkten 2)–4) jeweils eindeutig bestimmt.

Beweis 1) $\Rightarrow$ 4) siehe obige Überlegungen.

4) $\Rightarrow$ 2) trivial

4) $\Rightarrow$ 3) —"—

2) $\Rightarrow$ 1) Wegen $M \cdot N = I$ gilt $F_I = F_{M \cdot N} = F_M \circ F_N = id$

$\Rightarrow$ Daher ist F_M surjektiv $\left(\forall y \in K^n: \quad F_M(F_N(y)) = y \right)$

$F_M: K^n \to K^n$ linear

$\Rightarrow F_M$ ist bijektiv $\rightarrow F_M$ ist Isomorphismus,

$\Rightarrow M$ ist darst. Matrix eines Isomorphismus. $\Rightarrow M$ invertierbar.

3) $\Rightarrow$ 1) W.o. erhalten wir $F_N \circ F_M = id$.

$\Rightarrow$ Daher ist F_M injektiv (Wenn $F_M(x) = F_M(y)$, so folgt $x = F_N(F_M(x)) = F_N(F_M(y)) = y$)

$\Rightarrow$ F_M ist bijektiv; weiter wie oben.

Zur Eindeutigkeit: In 2, 3, 4 ist immer F_M bijektiv und $F_N \circ F_M = F_M \circ F_N = F_I = id$, d.h. F_N ist die zu F_M inverse Abb. Die ist eindeutig. Ihre Matrixdarst. N ist eind. $\Rightarrow$ N ist eindeutig

Alternativ: einfaches Nachrechnen:

z.B. $L_1 M = I$ $\quad MR = I$,

$L_2 M = I$

$$L_1 = L_1 \cdot I = L_1(MR) = (L_1 M)R = IR = R = IR = L_2(MR) = L_2 I = L_2$$

$\Rightarrow L_1 = L_2 = R$ alles eindeutig. $\square$

Definition Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Die eindeutige Matrix B mit

$$AB = BA = I$$

heißt die zu A inverse Matrix und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Die Menge aller invertierbaren $n\times n$ - Matrizen über K wird mit

$$GL_n(K) = \{A \in K^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$$

bezeichnet. „general linear group"

<u>Satz 2.9 (Rechnen mit Inversen).</u> Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in GL_n(K)$.
Dann gilt

1) $A\cdot B$ ist invertierbar (also $AB \in GL_n(K)$) und es gilt
$$(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$
2) $A^{-1} \in GL_n(K)$ und es gilt $\quad (A^{-1})^{-1} = A$
3) $I \in GL_n(K)$ und es gilt $\quad I^{-1} = I$
4) $GL_n(K)$ ist eine Gruppe (also innere Verkn., Assoziativ, neutr. El., inv. El.).
5) $A^t \in GL_n(K)$ und es gilt
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$
(Transposition).

<u>Beweis</u>. 1) $(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$.
$B^{-1}\cdot A^{-1}$ tut das Gewünschte und die Eind. der Inversen bringt den Rest.
2) $(A^{-1})\cdot A = I$

$\Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$

3) $I \cdot I = I$.

4) Assoz. gesetz geerbt; Rest ist 1, 3, 2.

5) $A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t = I^t = I.$

Rechenregeln für Transp.

$\square$

Achtung Alle Matrizen in diesem Abschnitt waren quadratisch.
Für nicht-quadratische Matrizen $\in K^{m \times n}$ mit $m \neq n$
kann alles schiefgehen: