2.5. Basiswechsel

Die darst. Matrix einer lin. Abb. hängt von den gewählten Basen ab.
Was passiert mit der darst. Matrix genau, wenn wir die Basis wechseln?

Satz 2.10. (Basiswechsel) Seien V, W zwei endl.-dim. K-Vektorräume, $F: V \to W$ eine lineare Abbildung. $A = (v_1, \dots, v_n)$ und $B = (w_1, \dots, w_m)$ seien Basen von V bzw. W und $M \in K^{m \times n}$ sei darst. Matrix von F bzgl der Basen A und B.
Seien $A^{neu} = (v_1^{neu}, \dots, v_n^{neu})$ und $B^{neu} = (w_1^{neu}, \dots, w_m^{neu})$ weitere Basen von V bzw W. Dadurch sind zwei eindeutige Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$ mit

$$v_k^{neu} = \sum_{j=1}^{n} s_{kj} v_j \qquad w_k^{neu} = \sum_{j=1}^{m} t_{kj} w_j$$

für alle k.
Dann wird F bezüglich der Basen A^{neu} und B^{neu} durch

$$T^{-1} \cdot M \cdot S$$

dargestellt (insbes. sind S und T invertierbar).

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "F_S"] \arrow[d, "\Phi_{A^{neu}}"'] \arrow[rrr, bend left, "F_{T^{-1}MS}"] & K^n \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_B"] \arrow[r, shift left, "F_{T^{-1}}"] & K^m \arrow[l, shift left, "F_T"] \arrow[d, "\Phi_{B^{neu}}"] \\
V \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "F"'] & V \arrow[r, "F"] & W \arrow[r, leftrightarrow, "id"] & W
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow T^{-1}MS$ stellt F bzgl. A^{neu} und B^{neu} dar.

$$id\left(v_k^{neu}\right) = \sum_{j=1}^{n} s_{kj} v_j$$

Korollar Wenn $F : V \to V$ ein Endomorphismus ist, $B = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von V, F bzgl. B durch M dargestellt.
Sei $B^{neu} = (w_1^{neu}, \ldots, w_n^{neu})$ eine weitere Basis von V mit

$$w_k^{neu} = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} w_j,$$

so ist F bezüglich der Basis B^{neu} durch
$T^{-1} M T$

dargestellt.

<u>Beispiel.</u> $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzgl. Standardbasis.

Neue Basis: $v_1^{neu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $v_2^{neu} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ +1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Wie wird F_M bzgl. der neuen Basis dargestellt?

3.12.2009

$v_1^{neu} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$ $v_2^{neu} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$

$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ... beschreibt Basiswechsel.

$M^{neu} = T^{-1} \; M \; T$

Bestimme T^{-1} durch „Erraten"

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Probe: $T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1/2 \\ \frac{1}{2}-1/2 & 1/2+1/2 \end{pmatrix}$

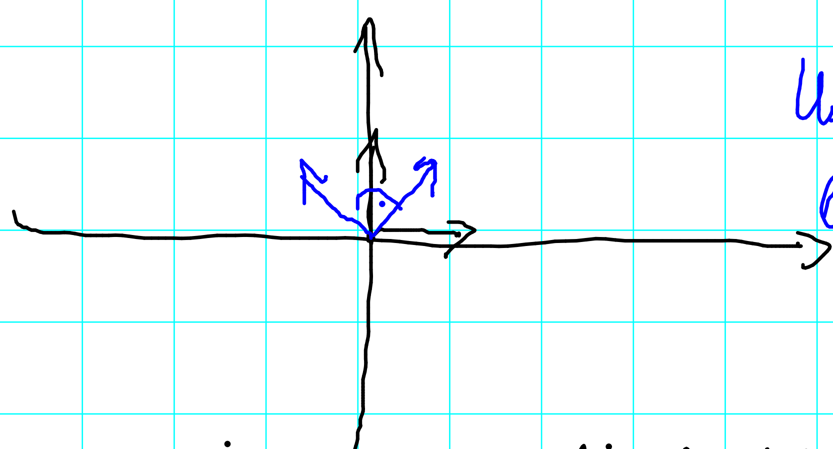
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$M^{neu} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das ist Diagonalmatrix, das ist netter. Auf all das kommen wir noch zu sprechen.



Um 45° nach links gedreht.

Bemerkung: Wir sagen, die Matrizen S und T aus dem Satz beschreiben den Basiswechsel; in den Spalten stehen die Koord. der neuen Basisvektoren bezüglich der alten Basisvektoren.

Definition. 1) Seien $M, N \in K^{m\times n}$. Dann heißen M und N äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{m\times m}$ und $T \in K^{n\times n}$ mit

$$N = S^{-1} M T$$

gibt.

2) Seien $M, N \in K^{n\times n}$. Dann heißen M und N ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ gibt, sodass

$$N = T^{-1} M T$$

gibt.

Bemerkung.
- Äquivalente Matrizen beschreiben dieselbe lin. Abb. bezüglich verschiedener Basen
- Ähnliche Matrizen beschreiben Endomorphismen bzgl. versch. Basen (Ausgangs- und Zielbasis jeweils gleich).
- Wenn $M, N \in K^{n\times n}$

  M, N ähnlich $\Longrightarrow$ M, N äquivalent, aber nicht notw. umgek.