2.6. Rang.

Definition 1) Sei $F: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt $\dim \operatorname{Im} F$ auch der Rang von F.

$$\operatorname{rank} F = \dim \operatorname{Im} F$$

2) Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix. Dann definiere den Rang von A als $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} F_A$, wobei $F_A : K^n \to K^m$; $x \mapsto Ax$ die durch A induzierte lin. Abb.

Proposition. Sei $A \in K^{m \times n}$; $A = (a_1 \; \dots, a_n)$, also sind $a_j \in K^m$ die Spalten von A. Dann gilt

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Beweis.

$$\operatorname{Im} F_A = \{ Ax \mid x \in K^n \} = \left\{ (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in K \right\} =$$

$$= \{ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid x_1, \dots, x_n \in K \} =$$

$$= \{ x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \mid \text{— " —} \} =$$

$$= \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$$

$\Rightarrow$ rank $A = \dim \operatorname{Im} F_A = \dim \underbrace{\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}}_{\text{„Spaltenraum von } A\text{"}}$ $\square$

<u>Definition.</u> Sei $A \in K^{m \times n}$ mit Zeilen $\begin{pmatrix} b_1^t \\ \vdots \\ b_m^t \end{pmatrix}$. Dann heißt $\dim \underbrace{\operatorname{span}\{b_1^t, \dots, b_m^t\}}_{\text{„Zeilenraum"}}$ auch der Zeilenrang von A.

Zur Abgrenzung heißt der Rang von A auch der Spaltenrang von A.

<u>Proposition.</u> Äquivalente Matrizen haben denselben Rang

bzw.

Sei $F : V \to W$ lin. Abb. zwischen endlich-dimensionalen K-VR V und W, $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ Basen von V bzw W und M die Matrixdarst. von F bzgl. dieser Basen. Dann gilt

$$\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} F.$$

<u>Beweis.</u>

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & K^m \arrow[d, shift left, "\Phi_B"] \\
V \arrow[r, "F"] & W \arrow[u, shift left, "\Phi_B^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$$\Phi_B \circ F_M = F \circ \Phi_A$$

$$\Phi_B^{-1} \circ \Phi_B \circ F_M = \Phi_B^{-1} \circ F \circ \Phi_A$$

$$\Longrightarrow F_M = \Phi_B^{-1} \circ F \circ \Phi_A .$$

$$\operatorname{Im} F_M = F_M(K^n) = \underset{\text{Isom.}}{\Phi_B^{-1}}\Big(\underbrace{F\big(\underbrace{\Phi_A(K^n)}_{V}\big)}_{\operatorname{Im} F}\Big) = \Phi_B^{-1}(\operatorname{Im} F).$$

Isomorphismen erhalten die Dimension.

$$\operatorname{rank} M = \dim \operatorname{Im} F_M = \dim \operatorname{Im} F = \operatorname{rank} F \qquad \square$$

<u>Satz 2.12</u> Sei F eine lin. Abb. zwischen zwei endl.-dim K-VR V und W. Dann gibt es eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{N}_0$, sodass es Basen A von V und B von W gibt, sodass F bezüglich dieser Basen durch die Matrix

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{r}\Big\}\, r$$

dargestellt wird.

Es gilt dann $\quad r = \operatorname{rank} F$.

<u>Beweis</u>. Im Beweis der Dimensionsformel haben wir gesehen, dass V eine Basis ~~besitzt~~

$$(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_\ell),$$

besitzt, wobei $u_1, \dots, u_\ell$ eine Basis von $\operatorname{Ker} F$ und

$$F(v_j) = w_j,$$

wobei $w_1, \dots, w_\ell$ eine Basis vom $\operatorname{Im} F$ sind.

Ergänze $w_1, \dots, w_\ell$ zu Basis $w_1, \dots, w_m$ von W.

Bestimme Matrix darst von F bzgl. Basen $(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_\ell)$ und $(w_1, \dots, w_m)$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & & & \\ & \vdots & & 1 & & & \\ \hline & & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{r}\Big\}\, r$$

Spaltenrang von

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist r, weil die ersten r Spalten gleich $e_1, \ldots, e_r$ und diese bekanntermaßen l.u. sind und die weiteren Spalten Nullspalten sind.

$\Longrightarrow$ da $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ eine darst. Matrix von F ist, muss $\operatorname{rank} F = \operatorname{rank}\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = r$ gelten.

Damit ist r eindeutig bestimmt. $\square$

<u>Korollar.</u> Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt $\operatorname{rank}(A) = \text{spaltenrang}(A) = \text{zeilenrang}\, A = \operatorname{rank} A^t$.

<u>Beweis.</u> Lt. Satz wird $F_A : K^n \to K^m$; $x \mapsto Ax$ durch Wahl geeigneter Basen durch
$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
dargestellt, wobei $r = \operatorname{rank}(A)$.

Lt. Satz über Basiswechsel sind A und $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent, d.h. es gibt S, T invertierbar mit
$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T.$$

Damit gilt

$$A^t = \left(S^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T\right)^t = T^t \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t (S^{-1})^t =$$

$$= \underbrace{T^t}_{\text{invertierb.}} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{(S^{-1})^t}_{\text{invertierbar}}$$

Daher ist A^t äquivalent zu $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und damit

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{rank}(A^t) = \text{rank}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r = \text{rank}(A) \qquad \square$$

__Definition.__ Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann heißt A regulär, wenn $\text{rank}\, A = n$

__Satz 2.13.__ Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) A ist regulär
2) Die Spalten von A sind l.u.
3) Die Spalten von A bilden eine Basis von K^n
4) Die Zeilen von A sind l.u.
5) Die Zeilen von A bilden eine Basis von K^n
6) Die Abb. F_A ist bijektiv
7) A ist invertierbar

8) Es gibt genau ein $x \in K^n$ mit $Ax = 0$, nämlich $x = 0$

9) Für jedes $b \in K^n$ gibt es genau ein $x \in K^n$ mit $Ax = b$

10) (Preview) $\det A \neq 0$

11) (Preview) 0 ist kein Eigenwert von A

Beweis. A regulär (1) $\Leftrightarrow$ rank $A = n$ $\Leftrightarrow$ Der Spaltenraum von A hat Dim. n $\Leftrightarrow$ Spalten (2) l.u. $\Leftrightarrow$ Spalten sind Basis (3) von K^n

Der Zeilenraum von A hat Dim. n $\Leftrightarrow$ Zeilen l.u. (4) $\Leftrightarrow$ Zeilen sind Basis (5) von K^n

$\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} F_A = n$

$\Updownarrow$

F_A ist bijektiv (6) $\Leftrightarrow$ F_A ist surjektiv

(7) A invertierbar $\Leftrightarrow$ F_A ist bijektiv

$\Leftrightarrow$ $\forall\, b \in K^n$: es existiert genau ein $x \in K^n$ mit $F_A(x) = b$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, b \in K^n$: —— " —— $x \in K^n$ mit $Ax = b$ (9)

$\Downarrow$

es existiert genau ein $x \in K^n$ mit $Ax = 0$ (8)

($x = 0$ tut das immer) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} F_A = \{0\}$ $\Rightarrow$ F_A injektiv

10,11 Folgen zu gegebener Zeit