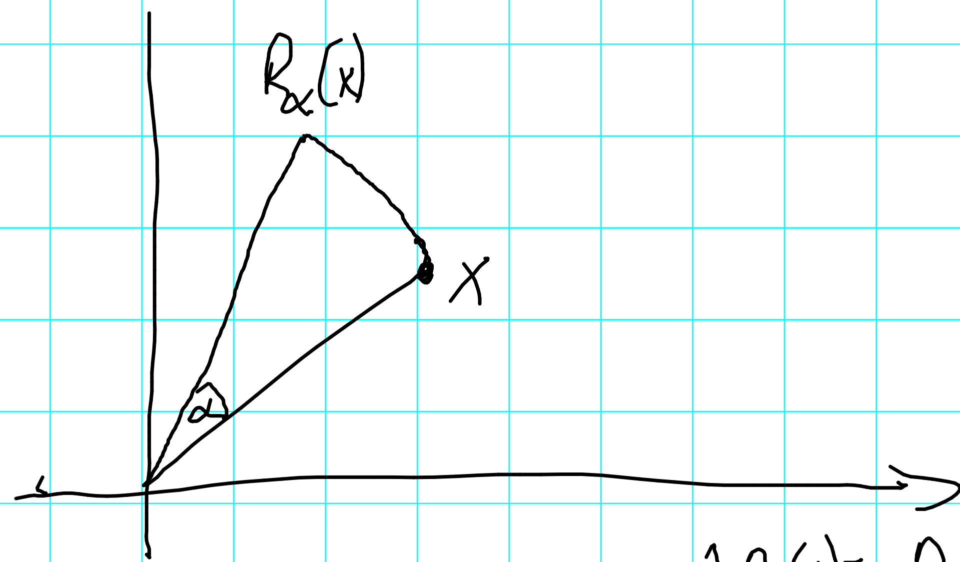
2.7. Drehmatrizen

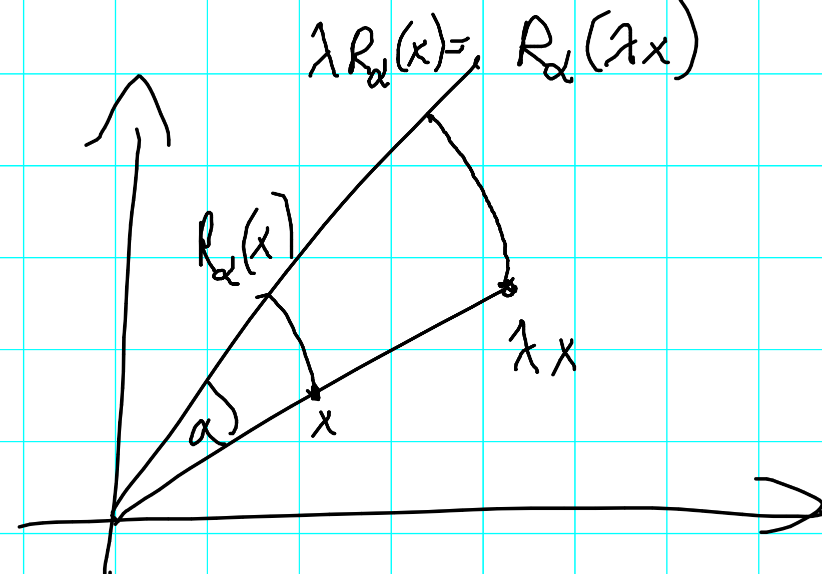
7.12.2009

$\mathbb{R}^2$, Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, Drehung um den Ursprung um den Winkel α in math. pos. Richtung.

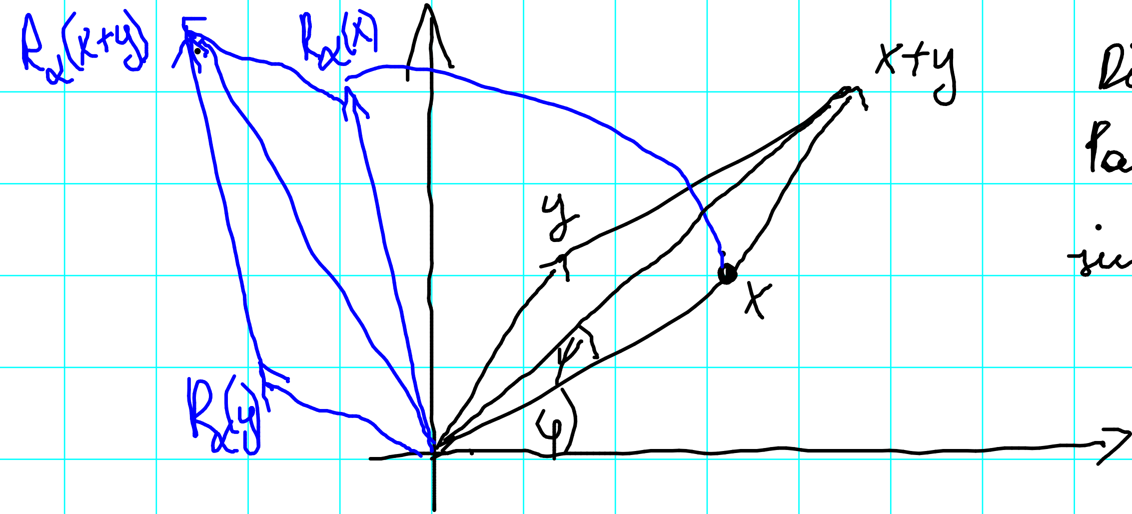


<u>Beh.</u> R_α ist lineare Abb.

$$R_\alpha(\lambda x) = \lambda R_\alpha(x) \text{ siehe Abb.}$$

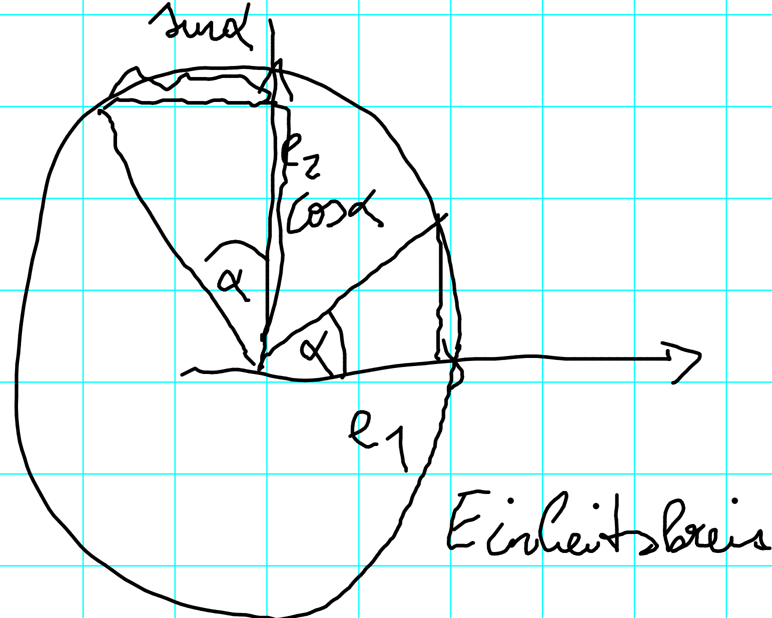


$$R_\alpha(x+y) = R_\alpha(x) + R_\alpha(y)$$



Die beiden Parallelogramme sind kongruent

Wir interessieren uns für die darstellende Matrix D_α von R_α bzgl. der Standardbasis. DSddMsdKdBdBv.



$$R_\alpha(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$R_\alpha(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

„Drehmatrix um Winkel α".

$$R_\beta \circ R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$$

$$D_\beta \cdot D_\alpha = D_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -(\cos\beta\sin\alpha \ldots) \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \end{aligned} \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) In Abschnitt 2.5 war die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{zu invertieren}$$

$$= D_{45°}$$

$$T^{-1} = D_{-45^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2) $$D_\alpha^{-1} = D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = D_\alpha^t$$

$\Rightarrow$ D_α ist eine orthogonale Matrix ~~[illegible]~~ vgl LinAlg 2

3) Ü26 $$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

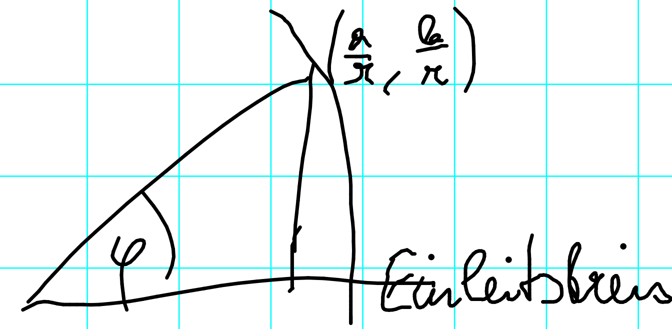
das waren die komplexen Zahlen.

Sei $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M$. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix}$$

$\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ liegt am Einheitskreis,

also eind. Best. durch seinen Winkel φ mit der x-Achse



$$\frac{a}{r} = \cos\varphi$$

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

$$\Rightarrow \quad z = r\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = \underbrace{r}_{\text{Radius}}\ \underbrace{D_\varphi}_{\text{Drehmatrix}}$$

Polardarst. von komplexen Zahlen

Seien $z, w \in \mathbb{C}$; $z = r\,D_\varphi$, $w = s\,D_\psi$, $r, s, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$.

$$z\cdot w = (r\,D_\varphi)\cdot(s\,D_\psi) = rs\ D_\varphi\cdot D_\psi = rs\ D_{\varphi+\psi}.$$

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Radien multipliziert und die Winkel addiert

Sei $n \in \mathbb{N}$. $z^n = r^n\ D_{n\varphi}$

$$(r\cos\varphi + i r\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ de Moivre