3.2. Zeilenstufenform, elementare Zeilenumformungen, Gaußsches Eliminationsverfahren

<u>Definition (Zeilenstufenform)</u> Sei $A \in K^{m \times n}$. Wir sagen, A sei in Zeilenstufenform, wenn es ein $r \in \mathbb{N}_0$ gibt, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$, sodass

1) Alle Zeilen unter der r-ten Zeile sind Nullzeilen, also
$\forall i > r \ \forall j: \quad a_{ij} = 0.$
2) In der i-ten Zeile (mit $i \leq r$) stehen in den Spalten links der j_i-ten Spalte nur Nullen und in der j_i-ten Spalte steht keine 0, also:
$\forall i \leq r \ \forall j < j_i: \quad a_{ij} = 0$
$\forall i \leq r: \quad a_{i j_i} \neq 0.$

<u>Beispiel 1)</u>

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ j_1 = 1 \quad j_2 = 2 \qquad\quad j_3 = 4 \quad j_4 = 5 \end{array} \qquad r = 4$$

$1 < 2 < 4 < 5$

Zeilenstufenform.

2) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

keine Zeilenstufenform

$j_1 = 1 \quad j_2 = 3 \quad j_3 = 1$

3) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 39 \end{pmatrix}$

keine Zeilenstufenform.

<u>Lemma</u>. Sei $A \in K^{m \times n}$ in Zeilenstufenform und r die Zahl ~~der~~ der Nicht-Nullzeilen von A. Dann gilt

$$\operatorname{rank} A = r.$$

<u>Beweis</u>. <u>Beh.</u> Die ersten r Zeilen von A sind linear unabhängig.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_r^t \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 a_1^t + \lambda_2 a_2^t + \dots + \lambda_r a_r^t = 0.$$

<u>Beh.</u> $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ für alle k.

<u>Beweis</u> durch Induktion nach k.

<u>Basis</u> $k=0$ nichts zu zeigen,

<u>Schritt $(k-1) \Rightarrow k$</u>

$$\lambda_k a_k^t + \lambda_{k+1} a_{k+1}^t + \dots + \lambda_r a_r^t = 0.$$

In der Spalte j_k hat a_k einen Eintrag $a_{k j_k} \neq 0$, für alle Zeilen darunter gilt $a_{i j_k} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \lambda_k a_{k j_k} + \lambda_{k+1} \cdot 0 + \dots + \lambda_r \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_k a_{k j_k} = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \boxed{\text{Beh}}$$

$\boxed{\text{Beh}}$

$\square$

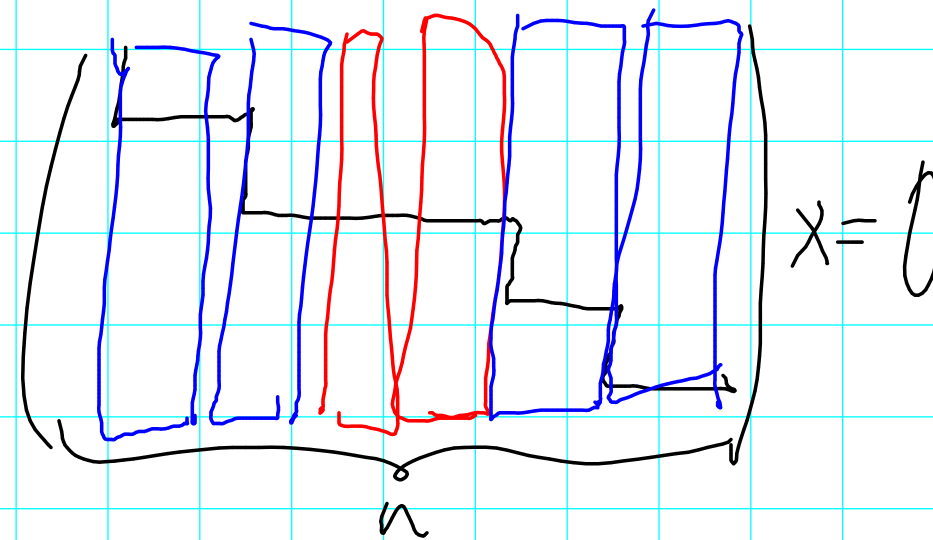
$\Rightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = \text{Zeilenrang}(A) = r$.

Wenn man ein lin GLS $Ax=b$ mit A in Zeilenstufenform gegeben hat, dann kann man es leicht lösen:

- Bestimmung von $\operatorname{Ker} A$.

  Sei $r=$ die Anzahl der Zeilen $\neq 0$, also $\operatorname{rank} A = r$.

  $\Rightarrow \; n = \dim \operatorname{Ker} A + \underbrace{\dim \operatorname{Im} A}_{r}$



$\Rightarrow \; \dim \operatorname{Ker} A = n - r.$

n Spalten; in den Spalten $j_1, \ldots, j_r$ stehen Stufenkanten, in den übrigen $n-r$ Spalten stehen keine Stufenkanten

Wähle einen Parameter t_j für jede Spalte, in der keine Stufenkante ist (also $j \neq j_i$ für alle i)

Lese Gleichungen von unten nach oben.

r-te Gleichung:

$$a_{r j_r} x_{j_r} + \sum_{j > j_r} a_{rj} x_j = 0$$

Parameter, weil nicht an Stufenkante.

$$\Rightarrow \quad x_{j_r} = -\frac{1}{a_{rj_r}} \sum_{j>j_r} a_{rj} x_j$$

Wenn die i-te Zeile behandelt wird, werden $x_{j_i+1}, \dots, x_n$ bereits bestimmt.

$$a_{ij_i} x_{j_i} + \sum_{j>j_i} a_{ij} \underbrace{x_j}_{\text{bereits bestimmt}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{j_i} = -\frac{1}{a_{ij_i}} \sum_{j>j_i} a_{ij} x_j$$

Damit ist x_{j_i} die Linearkomb. der Parameter.

Beispiel

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} & t_1 & & & t_2 \end{array}$$

$x_5 = t_2$

$x_2 = t_1$

3. Glg. $\quad 9x_4 + 0x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 0$

2\. Glg $\quad 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \qquad x_3 = 0.$

1\. Glg. $\quad 7x_1 + 1x_2 = 0$

$$7x_1 = -x_2 = -t_1$$

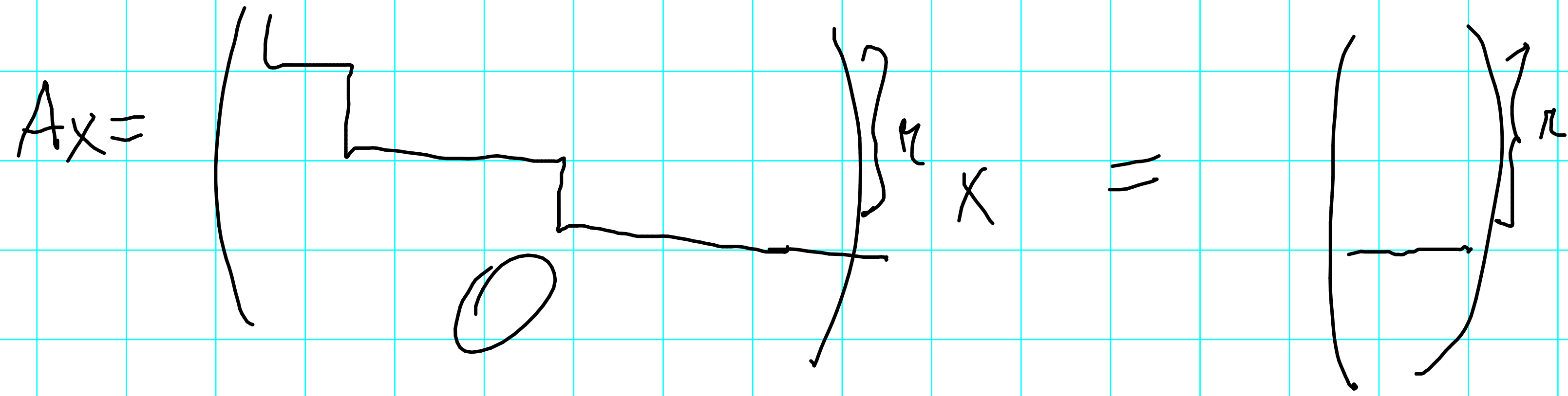
$$\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{7}t_1.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1/7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

10.12.2009

Bemerkung noch zum allg. Fall: Da wir wissen, dass Ker A die Dimension $n-r$ hat und wir die Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ als Linkomb. mit $n-r$ Parametern geschrieben haben, folgt, dass die zugehörigen Vektoren eine Basis von Ker A bilden.

<u>Behandlung der Inhomogenität</u> Wir lösen $Ax = b$, wobei A bereits in Zeilenstufenform ist, A habe r Zeilen $\neq 0$.



Wenn es ein $b_j \neq 0$ mit $j > r$ gibt, so lautet die j-te Zeile des GLS

$$0 = b_j$$

Das ist ein Widerspruch, somit gibt es keine Lösung.

Sei jetzt $b_j = 0$ für alle $j > r$. Gehe vor wie früher, also setze die Variablen, die nicht auf Stufenkanten stehen, auf Parameter und löse nach den restlichen auf.

<u>Beispiel</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

keine Lösung

Damit wir mehr sehen, eine neue rechte Seite: $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ein Parameter: $x_2 = t$

$$2x_3 = 6 \Longrightarrow x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$x_1 = 4 - 2t - 3\cdot 3 = -5 - 2t.$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 2t \\ 0 + 1\cdot t \\ 3 + 0t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das ist, wie erwartet, ein affiner Unterraum (hier eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, die ursprünglich als Schnitt zweier Ebenen gegeben war.).

Wie bringen wir eine Matrix auf Zeilenstufenform?

Wir multiplizieren A und rechte Seite b mit regulären Matrizen von links.

Wir nehmen die Matrizen aus Beispiel 69.

Dabei führt man nicht wirklich die Matrizenmultiplikation aus, weil man aus Bsp 69 schon weiß, was passiert: Addition des α-fachen der r-ten Zeile zur s-ten Zeile; Multiplikation der r-ten Zeile mit Skalar $\alpha \neq 0$, Vertauschen der r-ten und der s-ten Zeile für r, s, α unserer Wahl, „elementare Zeilenumformungen".

Beispiel 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \end{matrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 2 & 3-2\cdot 1 & 3-2\cdot 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

__Algorithmus (Gauß-Elimination)__

ges. $A \in K^{m\times n}$

ges. Eine Matrix $B \in K^{m\times n}$, sodass $B = TA$ und T Produkt von Matrizen aus Bsp 6?.

$r := 0$ (r ist Anzahl auf korrekte Form gebrachter Zeilen)

for $j = 1$ to n

if $\exists\, s \in \{r+1, \dots, m\} : a_{sj} \neq 0$ then

$r = r + 1$

Vertausche Zeilen r und s von A. $(a_{rj} \neq 0)$

for $i = r+1$ to m

$l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{rj}}$

Addiere das l_{ij}-fache der r-ten Zeile zur i-ten Zeile

$(a_{ij}^{neu} = a_{ij}^{alt} - l_{ij} a_{rj} = 0)$

end for

$j_r = j$

end if

end for

__Satz 3.1__ Der Algorithmus Gauß-Elimination terminiert und ist korrekt.

Beweisskizze. Terminierung ist klar, weil es lauter Schleifen mit festem Bereich gibt.

Korrektheit durch eingestreute Kommentare und Händefalten klar $\square$

Wenn l. GLS $Ax = b$ gegeben, so müssen wir sowohl A als auch b mit derselben regulären Matrix von links multiplizieren (i.e. elem. ZUF durchführen). Da $(TA \;\; Tb) = T(A \;\; b)$, kann so vorgegangen werden, dass die „erweiterte Koeffizientenmatrix" $(A \;\; b)$ auf Z-Stufen-Form gebracht wird und dann letzte Spalte als rechte Seite gesehen wird.

<u>Beispiel</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeff.-Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$2x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 0$$

$$x_1 + 0 \cdot x_2 = 9 \quad \longrightarrow \quad x_1 = 9$$

14.12.2009

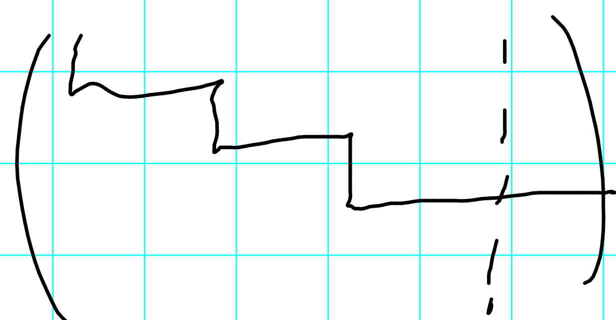
Proposition Sei $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$. Dann ist das lin. GLS $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \,\vdots\, b)$$

„Rang der Systemmatrix gleich Rang der erweiterten Koeff.-Matrix"

Beweis 1 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \,\vdots\, b)$ genau dann, wenn der Spaltenraum von $(A \,\vdots\, b)$ und A gleich ist $\iff$ $b \in$ Spaltenraum(A) $\iff$ b kann als Linearkomb. $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ der Spalten $a_1, \dots, a_n$ von A geschrieben werden $(x_1, \dots, x_n \in K)$ $\iff$ $\exists x \in K^n$: $Ax = b$.
$\iff$ LGLS $Ax = b$ ist lösbar $\square$

Beweis 2 Wir bringen $(A \,\vdots\, b)$ auf Zeilenstufenform. Dabei ändert sich der Rang nicht und die ersten n Spalten der Zeilenstufenform von $(A \,\vdots\, b)$ sind die Zeilenstufenform von A.
D.h. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \,\vdots\, b)$ $\iff$ keine Stufe in letzter Spalte



$\iff$ LGLS durch Rückwärtseinsetzen lösbar.

so heißt das Verfahren zur Lösung von LGLS in Zeilenstufenform $\square$

Proposition. Sei $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$, sodass $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \vdots b)$. Dann besitzt das lin. GLS $Ax = b$

1) unendlich viele Lösungen, wenn $\operatorname{rank} A < n$ und K unendlich
2) eine eindeutige Lösung, wenn $\operatorname{rank} A = n$

Beweis. Lt. Voraussetzung und voriger Proposition besitzt „$Ax = b$" mind. eine Lösung. Die Lösungsmenge ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - \operatorname{rank} A$.

$\operatorname{rank} A = n \Longrightarrow$ affiner UR der Dimension 0, also einelementig
$\operatorname{rank} A < n \Longrightarrow$ affiner UR positiver Dimension, also bei unendl. Körper unendl. viele Lösungen. $\square$

Bemerkung. Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, kann man Gauß-Elim. verwenden. Insofern helfen die beiden letzten Prop. hauptsächlich bei theoret. Betrachtungen.

Gauß-Elimination kann noch ein wenig mehr:

Proposition Sei $A \in K^{m\times n}$ und T eine reguläre $(m\times m)$-Matrix. Dann sind die Zeilenräume von A und $T\cdot A$ gleich.
Insbesondere ändert Gauß-Elimination den Zeilenraum

Beweis. Seien $\begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_m^t \end{pmatrix}$ die Zeilen von A.

(Randnotiz über „Seien": wählb.)

$$\text{Zeilenraum}(A) = \{ y_1 a_1^t + \dots + y_m a_m^t \mid y_1, \dots, y_m \in K \} =$$

$$= \left\{ (y_1 \dots y_m) \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_m^t \end{pmatrix} \;\middle|\; y_1, \dots, y_m \in K \right\} =$$

$$= \{ y^t \cdot A \mid y \in K^m \}$$

$$\text{Zeilenraum}(T \cdot A) = \{ z^t \cdot (TA) \mid z \in K^m \}.$$

Sei $z^t (TA) \in \text{Zeilenraum}(TA) \Rightarrow \underbrace{(z^t T)}_{=: y^t} A = y^t A \in \text{Zeilenraum}(A)$.

Umgekehrt: Sei $y^t A \in \text{Zeilenraum}(A)$.

$$y^t A = y^t (IA) = y^t ((T^{-1} T) A) = \underbrace{(y^t T^{-1})}_{=: z^t} (TA) = z^t (TA) \in \text{Zeilenraum}(TA).$$

Da ja Gauß-Elim der Multiplikation von A mit den regulären Matrizen aus Ü69 von links entspricht, folgt die Aussage für Gauß-Elim. $\square$

Beispiel. $W = \operatorname{span}\{(1,2,5)^t, (6,7,0)^t, (1,1,-1)^t\} \leq \mathbb{Q}^3$

Gesucht: Basis von W,

$$W = \text{Zeilenraum}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-6) \\ \cdot(-1) \end{matrix} = \text{Zeilenraum}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -30 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$\text{Zeilenraum}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -30 \end{pmatrix} \cdot(-5) = \text{Zeilenraum}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow (1,2,5)^t, (0,-1,-6)^t$ bilden Basis von W. $\square$

Proposition. Sei $A \in K^{m \times n}$ und $J \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dann sind die Spalten $a_j, j \in J$, genau dann l.u., wenn die Spalten $b_j, j \in J$, der Matrix $B = T \cdot A$ l.u. sind, wobei T regulär ist.

Beweis. $B = T \cdot A = T(a_1 \dots a_n) = (Ta_1 \dots Ta_n)$

$\Longrightarrow b_j = Ta_j$

OBdA sei $J = \{1, \dots, k\}$.

$a_1, \dots, a_\ell$ l.u. $\iff \operatorname{rank}(a_1, \dots, a_\ell) = \ell$

$\iff \operatorname{rank}(T(a_1, \dots, a_\ell)) = \ell$

$\iff \operatorname{rank}(\underbrace{Ta_1}_{b_1}, \dots, \underbrace{Ta_\ell}_{b_\ell}) = \ell \iff b_1, \dots, b_\ell$ l.u. $\square$

<u>Beispiel</u> Sei $W = \operatorname{span}\{(1,2,5)^t, (6,7,0)^t, (1,1,-1)^t\} \leq \mathbb{Q}^3$,

Gesucht: Basis von W

Wir suchen eine max. l.u. Teilmenge dieser Vektoren, die sind dann Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2,\,-5} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -30 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-6} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l.u.

$\Rightarrow (1,2,5)^t, (6,7,0)^t$ bilden Basis von W. $\square$

<u>Beispiel</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenraum x-z-Ebene verschieden Spaltenraum x-y-Ebene

- Der Spaltenraum kann sich bei Gauß-Elim. ändern.
- auch die Prop. über l.u. gilt nicht für Zeilen

Bemerkung 1: Spaltenumformungen bei lin. GLS nur, wenn Sie wissen, was Sie tun.

Bemerkung 2: Kreative ZUF machen evtl. Gauß lustiger, vielleicht sogar schneller, sind aber JEDENFALLS zu dokumentieren.