3.3. Gauß-Jordan-Algorithmus (der deutsche Jordan).

(14.12.2009)

Beispiel.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v & w & x & y & z & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 4 & 14 & 4 & 22 \\
0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 24 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ |:4 \\ |:16 \\ \\ \end{array}
\mapsto
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 7/2 & 1 & 11/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 0 & -9 & 1 & -7 \\
0 & 0 & 1 & 7/2 & 1 & 11/2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} +9 \\ -7/2 \\ \\ \\ \end{array}
\mapsto
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v & w & x & y & z & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 13/4 & 13/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/8 & 1/4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 3/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} v & x & y & w & z & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 13/4 & 13/2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1/8 & 1/4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 3/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$w = t_1$

$z = t_2$

$y = 3/2 - 1/4\, t_2$

$x = 1/4 - 1/8\, t_2$

$v = 13/2 - 13/4\, t_2 + 1 \cdot t_1$

$$\begin{pmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 0 \\ 1/4 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13/4 \\ 0 \\ -1/8 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauß-Jordan-Algorithmus:

- Gauß-Elimination auf Zeilenstufenform
- Erzwinge 1en an Stufenkanten durch Division der Zeilen
- Erzeuge Nullen über Stufenkanten durch Lin. Komb. der Zeilen
- optional: Spalten vertauschen auf Einheitsmatrix links

<u>Vorteil</u>. Rückwärtseinsetzen leicht bis banal.

<u>Nachteil</u> Mehr Zeilenumformungen (aber eigentlich dieselbe Rechnung wie bei Rückwärtseinsetzen)

<u>Anwendung</u> Berechnen inverser Matrizen

<u>geg.</u> $A \in K^{n \times n}$ hoffentlich regulär.

<u>ges</u> A^{-1}, D.h. eine Matrix $X = (x_1, \dots, x_n)$, sodass

$A \cdot X = I$

$A \cdot x_j = e_j$ $\qquad e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$ $\qquad$ (vgl Ü70).

$$(A \mid e_1) \qquad (A \mid e_2) \qquad \dots \qquad (A \mid e_n)$$

jeweils Gauß-Elim ... jede Spalte von X erhalten. (und etwas Zeit vergeudet)

Stattdessen: $4 \times$ ZSTUF auf einmal.

$$(A \mid e_1 \; e_2 \; e_3 \; \dots \; e_n) = (A \mid I).$$

Wenn $\operatorname{rang} A = n$, so hat Zeilenstufenform von A die Gestalt
(alles ist Stufen Kante).
Gauß-Jordan ergibt

$$(I \mid B)$$

Neues Gls: $I \cdot X = B \implies X = B.$ D.h. $B = A^{-1}$.

Beispiel $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$(A \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \cdot 2$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \cdot (-3)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) :2$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proposition Sei $A \in K^{n \times n}$ regulär und das Ergebnis des Gauß-Jordan-Algorithmus auf $(A \,\vdots\, I)$ angewandt gleich $(I \,\vdots\, B)$, dann gilt $B = A^{-1}$.

Beweis 1 Überlegungen oben.

Beweis 2 Die Zeilenumformungen entsprechen der Multiplikation von $(A \,\vdots\, I)$

mit einer regulären Matrix T von links, also

$$(I \,\vdots\, B) = T \cdot (A \,\vdots\, I) = (TA \,\vdots\, TI)$$

$$\Rightarrow \quad I = TA \quad \Rightarrow \quad T = A^{-1}$$

$$B = TI = T \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}.$$

$\square$