3.4 LR-Zerlegung.

(14.12.2009)

Definition Sei $A \in K^{n\times n}$ regulär, $L \in K^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonale und R eine obere Dreiecksmatrix mit von Null verschiedenen Diagonalelementen. Dann heißt (L,R) eine LR-Zerlegung von A, wenn

$$A = L \cdot R.$$

Anwendung zur Lösung vieler LGLS mit gleicher Systemmatrix A und verschiedenen rechten Seite

0) Bestimme (L,R) ... LR Zerlegung von A

zur Lösung von $Ax = b$ schreibe $L \cdot R x = b$, nenne $y := Rx$ und löse

1) $Ly = b$ „Vorwärtseinsetzen"

2) löse $Rx = y$ „Rückwärtseinsetzen" R ist schon in ZSF.

Nie mehr Gauß.

15.12.2009

Proposition Sei $A \in K^{n\times n}$ so, dass Gauß-Elimination ohne Zeilenvertauschung durchführbar ist und A regulär.
Dann besitzt A eine LR-Zerlegung.

Beweis. A wird durch Multiplikation mit Matrizen der Gestalt

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} I & & & \\ & 1 & & \\ & \alpha & I & \\ & & 1 & \\ & & & I \end{pmatrix} \qquad (L\text{-Matrix aus Bsp 69})$$

auf Zeilenstufenform gebracht,

$$L_N(\alpha_N) \cdots L_1(\alpha_1) A = R \qquad (R \text{ Zeilenstufenform und daher obere Dreiecksmatrix}).$$

Aus Ü69 wissen wir, dass $\left(L(\alpha)\right)^{-1} = L(-\alpha)$

$$\Rightarrow \quad A = L_1(\alpha_1)^{-1} \cdots L_{N-1}(\alpha_{N-1})^{-1} L_N(\alpha_N)^{-1} R$$

$$A = \underbrace{L_1(-\alpha_1) \cdots L_N(-\alpha_N)}_{\text{untere Dreiecksmatrix mit 1 auf Diagonale } =: L} R$$

$\square$

Satz 3.2 (Existenz der LR-Zerlegung) Sei $A \in K^{n\times n}$ und schreibe $A^{(k)}$ für die linke obere Teilmatrix von A mit k Zeilen und k Spalten. Dann besitzt A genau dann eine LR-Zerlegung, wenn für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass $A^{(k)}$ regulär ist.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 15 & 12 & 2009 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot(-15) \\ \end{matrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

nicht regulär, weil Zeilen l. a. sind

$$\mapsto \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -18 & 1994 \end{pmatrix}$$

hier müssten wir vertauschen

Beweis des Satzes

„$\Rightarrow$" Sei $A = L \cdot R$. Schreibe

$$L = \begin{pmatrix} L^{(k)} & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix} \}k \qquad R = \begin{pmatrix} R^{(k)} & ? \\ \underbrace{0}_{k} & ? \end{pmatrix} \}k$$

$$\begin{pmatrix} A^{(k)} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} L^{(k)} & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{(k)} & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{(k)} R^{(k)} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A^{(k)} = L^{(k)} R^{(k)}$

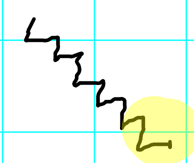
$L^{(k)}$ ist untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf Diag $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}$ ... regulär

$R^{(k)}$ ist obere ——— " ——— von Null verschied. Elementen auf Diag ... regulär

$\Rightarrow A^{(k)} = L^{(k)} \cdot R^{(k)}$ ist als Produkt zweier regulärer Matrizen regulär

„$\Leftarrow$" Wir müssen nur mehr zeigen, dass Gauß-Elim ohne Zeilenvert. funktioniert.

Während der Gauß-Algorithmus die Matrix auf ZStuFo bringt, bringt (wenn keine Zeilenvert. stattfinden) er auch $A^{(k)}$ auf Zeilenstufenform.

Da $A^{(k)}$ regulär, hat seine ZStuForm die Gestalt 
(obere Dreiecksmatrix mit allen Diag.el $\neq 0$)

Damit ist rechte untere Ecke $\neq 0$ und Gauß geht ohne Zeilenvertauschung weiter. □

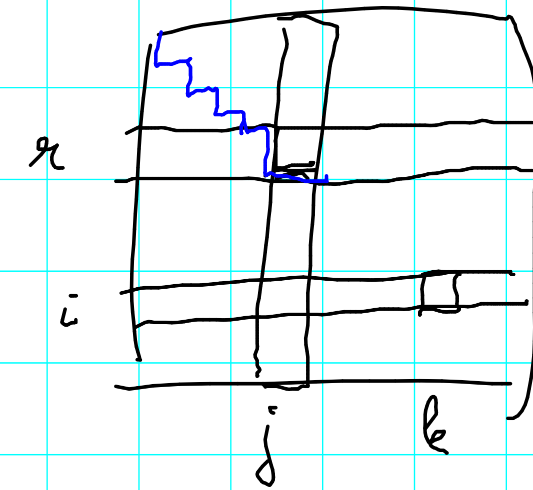
<u>Bemerkung</u> Es ist bei konkreten Rechnungen nicht sehr sinnvoll, die Regularität von $A^{(k)}$ für große k ernsthaft zu untersuchen, sondern führe gleich Gauß-Elimination aus.

Wie berechnet man LR-Zerlegung vernünftig?

Beobachte Element an Stelle ij:

Ein Schritt von Gauß:

$$a_{ik}^{\text{neu}} = a_{ik}^{\text{alt}} - l_{ij}\, a_{rk} \qquad a_{rk} = a_{rj}^{\text{Endgültig}}$$



In unserem Fall ist Matrix regulär, d.h. $r = j$, weil in jeder Spalte eine Stufenkante steht.

Also

$$a_{ik}^{\text{neu}} = a_{ik}^{\text{alt}} - l_{ij}\, a_{jk}^{\text{Endg.}}$$

Insgesamt:

$$a_{ik}^{\text{Endg}} = a_{ik}^{\text{Original}} - l_{i1}\, a_{1k}^{\text{Endg}} - l_{i2}\, a_{2k}^{\text{Endg}} \dots - l_{i,i-1}\, a_{i-1,k}^{\text{Endg}}$$

Da am Ende eine obere Dreiecksmatrix R herauskommt, sei

$$a_{ik}^{\text{Endg.}} =: r_{ik}$$
$$a_{ik}^{\text{Orig}} = a_{ik}$$

$$\Longrightarrow \quad r_{ik} = a_{ik} - l_{i1} r_{1k} - l_{i2} r_{2k} - \dots - l_{i,i-1} r_{i-1,k}$$

$$\Longrightarrow \quad a_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} r_{jk} + \underbrace{1}_{\overset{!}{=} l_{ii}} \cdot r_{ik} + \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{0}_{\overset{!}{=} l_{ij}} \cdot r_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} l_{ij} r_{jk}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{A}_{\text{urspr. Matrix}} = L \cdot \underbrace{R}_{\text{Zstufe}} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Das heißt, dass man nur die l_{ij} aus Gauß-Elimination in einer Matrix L mitschreiben muss.

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -4 \\ -2 \end{matrix} \rightsquigarrow \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \; \Big| \, -\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{R} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{L}$$

Probe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

__Bemerkung 1__ Wenn keine LR- Existiert, so existiert die LR Zerlegung einer Matrix, die aus A durch Zeilenvertauschungen entsteht. Das kann man durch sog. Permutationsmatrix beschreiben

__Bemerkungen 2__ Man spricht manchmal auch von $\underset{\text{lower}}{L}\,\underset{\text{upper}}{U}$ - Zerlegung