17.12.2009

Kapitel 4. Determinanten

4.1. Volumen von Parallelepiped

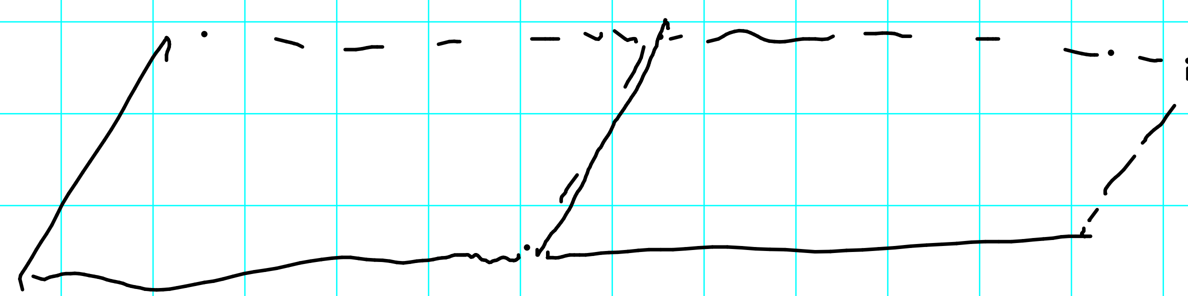
$\mathbb{R}^n$

Definition Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das von $x_1, \dots, x_n$ aufgespannte Parallelepiped die Menge

$$\{ \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid 0 \le \alpha_j < 1 \text{ für alle } j \}$$

Bsp

Bemerkung Aus technischen Gründen ist der „rechte obere" Rand nicht dabei



Annahme Es gebe eine Funktion vol, die „vielen" Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Zahl $\in [0, \infty]$, die zumindest auf Parallelepipeden definiert ist und für disjunkte Mengen A, B (wo vol definiert ist) gilt, dass $A \cup B$ auch einen Wert von vol besitzt, sodass

$$\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$$

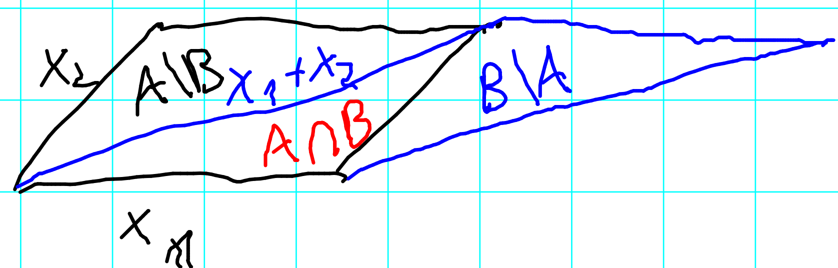
Weiters gelte $\mathrm{vol}(\emptyset) = 0$ und das Volumen des Parallelepipeds, das von der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ aufgespannt wird sei 1.

Lemma 1. Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Wenn $x_1, \dots, x_n$ l.u. sind, dann gilt

$$\mathrm{vol}\Big(\underbrace{\mathrm{Parallelepiped}(x_1, \dots, x_n)}_{A}\Big) = \mathrm{vol}\Big(\underbrace{\mathrm{Parallelepiped}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_n)}_{B}\Big)$$

für $i \neq j$.

Bild



$$\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(A \cap B) + \mathrm{vol}(A \setminus B)$$
$$\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(A \cap B) + \mathrm{vol}(B \setminus A)$$

$A \setminus B$ und $B \setminus A$ sind kongruente Dreiecke und haben daher (hoffentlich gleiches Volumen.

Zusätzliche Annahmen 1) $\operatorname{vol}(A) = \operatorname{vol}(x+A)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und A Menge mit Volumen

„Translationsinvarianz"

2) Wenn A eine Teilmenge eines affinen Unterraums des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$ ist, so gilt $\operatorname{vol}(A) = 0$.

Beweis Lemma 1

$$A = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid 0 \le \alpha_j < 1\}$$
$$B = \{\beta_1 x_1 + \beta_2 (x_1 + x_2) + \dots + \beta_n x_n \mid 0 \le \beta_j < 1\}$$

$A \cap B = ?$

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in B$$
$$\iff \alpha_1 x_1 + \alpha_2 (x_1 + x_2) - \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n \in B$$
$$\iff (\alpha_1 - \alpha_2) x_1 + \alpha_2 (x_1 + x_2) + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_n x_n \in B$$
$$0 \le \alpha_1 - \alpha_2 < 1 \qquad 0 \le \alpha_2, \dots, \alpha_n < 1$$

$$A \cap B = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid 0 \le \alpha_1, \dots, \alpha_n < 1 \text{ und } \alpha_2 \le \alpha_1\}$$
$$A \setminus B = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \text{ —— '' —— } \alpha_2 > \alpha_1\}$$

$$B \setminus A = \{\beta_1 x_1 + \beta_2 (x_1 + x_2) + \dots + \beta_n x_n \mid 0 \le \beta_j < 1\} \setminus A =$$
$$= \{(\beta_1 + \beta_2) x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \mid 0 \le \beta_j < 1\} \setminus A$$
$$= \{(\beta_1 + \beta_2) x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \mid \beta_1 + \beta_2 \ge 1, \; 0 \le \beta_j < 1\}$$

$$= x_1 + \{ (\beta_1+\beta_2-1)x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \mid \beta_1+\beta_2-1 \geq 0 \quad 0 \leq \beta_j < 1 \}$$

Setze $\beta_1 + \beta_2 - 1 = \gamma_1 \implies \gamma_1 \geq 0.$

$$\beta_1 = \gamma_1 - \beta_2 + 1 \qquad 0 \leq \beta_1 < 1 \iff 0 \leq \gamma_1 - \beta_2 + 1 < 1$$

$$\iff \gamma_1 < \beta_2 \quad \text{und} \quad \gamma_1 \geq \beta_2 - 1$$

$$\implies B \setminus A = x_1 + \{ \gamma_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n \mid 0 \leq \gamma_1 < 1,\ 0 \leq \beta_2, \dots, \beta_n < 1,\ \gamma_1 < \beta_2 \}$$

$$= x_1 + A \setminus B$$

$$\implies \mathrm{vol}(B\setminus A) = \mathrm{vol}(A \setminus B) \implies \mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(A\setminus B) + \mathrm{vol}(A \cap B) =$$

$$= \mathrm{vol}(B \setminus A) + \mathrm{vol}(A \cap B) = \mathrm{vol}(B).$$

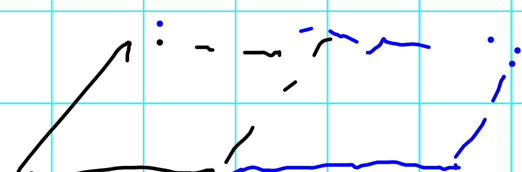
<u>Lemma 1a.</u> Lemma 1 gilt auch für l.a. Vektoren

<u>Beweis.</u> Beide Volumina sind 0 (Dimension!)

<u>Lemma 2</u> Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$|\alpha| \, \mathrm{vol}(\text{Parallelepiped}(x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{vol}(\text{Parallelepiped}(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)).$$

<u>Bild</u>



Beweisskizze. $\alpha \in \mathbb{N}$. α Kopien des Parallelepipeds nebeneinanderlegen und vereinigen ✓.

$\alpha = -1$ ~~Schiebe zurück~~ Schiebe zurück + Randumklebungen

$\alpha \in -\mathbb{N}$

$\alpha \in \mathbb{Q}$ vgl. Ü 79c

$\alpha \in \mathbb{R}$ Wählen Folgen α_k und $\alpha'_k \in \mathbb{Q}$

$\alpha_k \nearrow \alpha$ $\alpha'_k \searrow \alpha$

Das Volumen ist monoton: Wenn $A \subseteq B$, so folgt

$$\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(B \setminus A \,\dot\cup\, \underbrace{A \cap B}_{A}) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B \setminus A) \geq \mathrm{vol}(A)$$

Schachtle gewünschtes Volumen ein. $\square$

Beispiel. $x_1 = \begin{pmatrix} 67 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 67 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} 67 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{vol}(\ldots) = \begin{vmatrix} 67 & -12 & 6 \\ 67 & -6 & 12 \\ 67 & -6 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 67 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

vol(Parallelepiped$(\ldots)$)

schräle | Zeilenverschieben

$$= \begin{vmatrix} 67 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 67 & -12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 67 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{L2}{=} 67 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 402 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2412 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = 2412.$$

FW.

7.1.2010

Lemma 3. Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathrm{vol}(\text{Parallelepiped}(x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{vol}(\text{Parallelepiped}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \alpha x_j, x_{i+1}, \dots, x_n))$$

für $i \neq j$

Beweis. Für $\alpha = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $\alpha \neq 0$ gilt:

$$\mathrm{vol}(PE(x_1, \dots, x_n)) \overset{L2}{=} \frac{1}{|\alpha|} \mathrm{vol}(PE(\dots, \alpha x_j, \dots, x_i, \dots))$$

$$\overset{L1}{=} \frac{1}{|\alpha|} \mathrm{vol}(PE(\dots, \alpha x_j, \dots, x_i + \alpha x_j, \dots))$$

$$= \cancel{\frac{|\alpha|}{|\alpha|}} \mathrm{vol}(PE(\dots, x_j, \dots, x_i + \alpha x_j, \dots))$$

$\square$

Lemma 4. Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $i \neq j$:

$$\mathrm{vol}(PE(x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{vol}(PE(x_1, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_n))$$

(Vertauschen der i-ten und der j-ten Komponente ändert das Volumen nicht).

Beweis. Das Parallelepiped ändert sich nicht. $\square$

Also: Man kann Gauß-Jordan ausführen und erhält damit das Volumen

Bsp s.o.