4.1. SIGNUM von Permutationen

(7.1.2010)

<u>Definition</u>. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.
Wenn π bijektiv ist, so heißt π eine Permutation von n Elementen.

<u>Beispiel</u> $\pi : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$,

$\pi(1) = 2$

$\pi(2) = 3$

$\pi(3) = 1$

$\pi(4) = 4$

$$\begin{array}{c} i \to \\ \pi(i) \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(transponierte Wertetabelle)

Eine Permutation ist also eine Umordnung der Elemente $1, \dots, n$

<u>Definition</u>. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann setze $S_n = \{\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \pi \text{ Permutation}\}$
„symmetrische Gruppe der Ordnung n".

<u>Definition</u>. Sei $\pi \in S_n$. Dann definiere das Signum von π als

$$\operatorname{sign} \pi = \prod \frac{\pi(j) - \pi(i)}{}$$

$$\prod_{i<j} \qquad j-i$$

Beispiel

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{\cancel{3-2}}{\cancel{2-1}} \cdot \frac{\cancel{1-2}}{\cancel{3-1}} \cdot \frac{\cancel{4-2}}{\cancel{4-1}} \cdot \frac{\cancel{1-3}}{\cancel{3-2}} \cdot \frac{\cancel{4-3}}{\cancel{4-2}} \cdot \frac{\cancel{4-1}}{\cancel{4-3}}$$

$$= -(-(1)) = 1$$

Bemerkung Jeder Nenner $j-i$ kommt auch irgendwann möglicherweise mit anderem Vorzeichen als Zähler vor $\pi(\pi^{-1}(j)) - \pi(\pi^{-1}(i))$. D.h. es wird sich alles bis auf evtl. Vorzeichen kürzen.

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel ist die Anzahl der negativen Faktoren im Zähler. Ein negativer Zähler tritt genau dann auf, wenn $\pi(j) < \pi(i)$ für $j > i$ eintritt.

Proposition. Sei $\pi \in S_n$. Dann gilt

$$\operatorname{sign}\pi = (-1)^{\#\{\underbrace{(i,j) \mid j>i \text{ und } \pi(j)<\pi(i)}_{\text{„Fehlstände" \quad „inversion"}}\}}$$

Satz 4.1. (Multiplikativität von sign). Seien $\sigma, \pi \in S_n$. Dann gilt
$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\pi)$$
(sign ist ein Gruppenhomomorphismus von S_n nach $\{\pm 1\}$).

Beweis.
$$\operatorname{sign}(\sigma \circ \pi) = \prod_{j>i} \frac{(\sigma\circ\pi)(j) - (\sigma\circ\pi)(i)}{j-i} = \prod_{j>i} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{j-i} =$$

$$= \prod_{j>i} \left(\frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{\pi(j) - \pi(i)} \cdot \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j-i} \right) =$$

$$= \left(\prod_{j>i} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{\pi(j) - \pi(i)} \right) \cdot \underbrace{\left(\prod_{j>i} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j-i} \right)}_{\operatorname{sign}(\pi)}$$

ger. Anz. von Vorzeichenfehlern = ok

$$= \left(\prod_{\pi(j)>\pi(i)} \frac{\sigma(\pi(j)) - \sigma(\pi(i))}{\pi(j) - \pi(i)} \right) \cdot \operatorname{sign}(\pi)$$

$$\begin{matrix} l = \pi(j) \\ k = \pi(i) \end{matrix} \quad = \left(\prod_{l > k} \frac{\sigma(l) - \sigma(k)}{l - k} \right) \operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\pi)$$

$\square$

<u>Definition.</u> Sei $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Dann heißt die Permutation τ mit

$$\tau(k) = \begin{cases} j & \text{---- } k = i \\ i & \text{---- } k = j \\ k & \text{--- sonst} \end{cases}$$

die Transposition von i und j. Man schreibt kurz $\tau = (i\, j)$

(vertausche i und j)

<u>Beispiel.</u> $n = 4$.

$$(2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

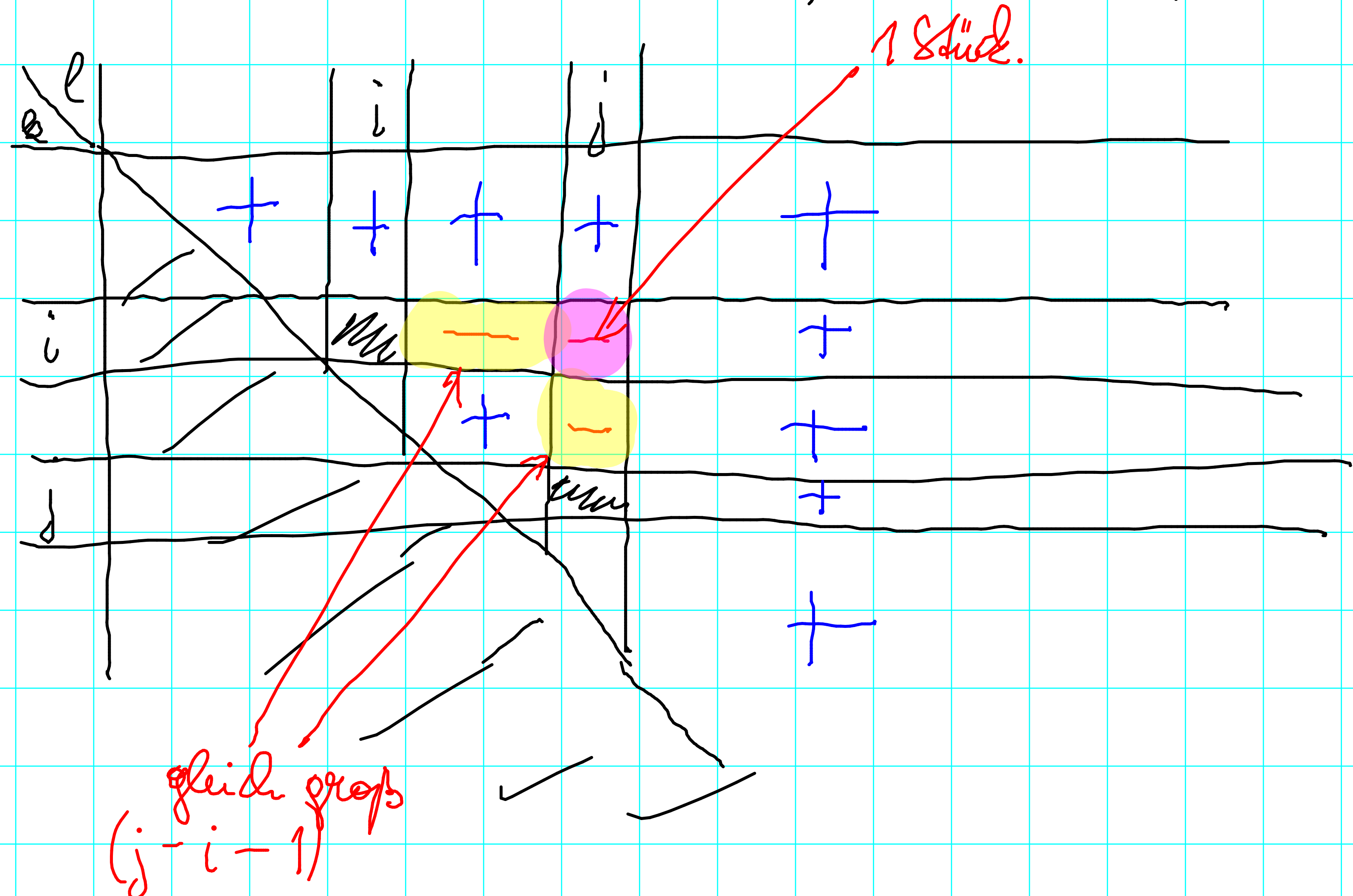
12.1.2010

<u>Proposition</u> Sei $i < j$. Dann gilt

$$\operatorname{sign}(i\, j) = -1$$

<u>Beweis</u>

Für $k < l$ müssen wir feststellen, ob $\pi(k) < \pi(l)$ oder nicht.



insgesamt eine ungerade Anzahl von $-$, also negatives Signum. $\square$