4.3 Determinanten

(11.1.2010)

Satz 4.2. *Sei K ein Körper. Es gibt genau eine Abbildung* $\det : K^{n\times n} \to K$ *mit folgenden Eigenschaften:*

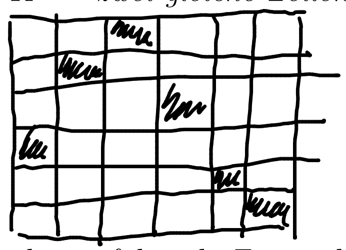
(D1) $\det$ *ist* linear in jeder Zeile, *d.h., für alle* $1 \le i \le n$, $a_1, \ldots, a_n, b, c \in K^n$ *und alle* $\lambda, \mu \in K$ *gilt*

$$\det \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_{i-1}^t \\ \lambda b^t + \mu c^t \\ a_{i+1}^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_{i-1}^t \\ b^t \\ a_{i+1}^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_{i-1}^t \\ c^t \\ a_{i+1}^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix},$$

(D2) $\det$ *ist* alternierend, *d.h., falls* $A \in K^{n\times n}$ *zwei gleiche Zeilen hat, so ist* $\det A = 0$,

(D3) $\det$ *ist* normiert, *d.h.,* $\det I_n = 1$,

nämlich



$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}. \tag{1}$$

Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann hat $\det$ *unter anderem folgende Eigenschaften:* $\sum_{\text{Turmaufst.}} \operatorname{sign}(\sigma) \prod \text{Turmpositionen}$

(D4) $\forall \lambda \in K : \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(D5) Falls B aus A durch Vertauschen zweier Zeilen hervorgeht, so gilt

$$\det B = -\det A,$$

(D6) Falls B aus A durch Addieren des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile hervorgeht, so gilt $i \neq j$

$$\det B = \det A.$$

(D7) Falls $\operatorname{rank} A < n$, *so gilt* $\det A = 0$.

(D8) Wenn A eine obere Dreiecksmatrix ist, so gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

also: „Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente“.

(D9) *Falls in der Form*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

für $B \in K^{k \times k}$, $C \in K^{k \times (n-k)}$, $D \in K^{(n-k) \times (n-k)}$ *geschrieben werden kann, dann gilt*

$$\det A = \det B \det D.$$

(D10) *Die Abbildung* det *ist* multiplikativ, *d.h., falls* A, $B \in K^{n \times n}$, *so gilt*

$$\det AB = \det A \det B.$$

(D11) *Falls* A *regulär ist, so gilt* $\det A \neq 0$ *und*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

(D12) *Es gilt*

$$\det(A^t) = \det A.$$

<u>Beweis</u> (D4)

$$\det\begin{pmatrix}\lambda a_1^t\\ \lambda a_2^t\\ \vdots\\ \lambda a_n^t\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{lin in}\\ \text{1. Zeile}}}{=} \lambda \det\begin{pmatrix}a_1^t\\ \lambda a_2^t\\ \vdots\\ \lambda a_n^t\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{lin in}\\ \text{2. Zeile}}}{=} \lambda^2 \det\begin{pmatrix}a_1^t\\ a_2^t\\ \lambda a_3^t\\ \vdots\\ \lambda a_n^t\end{pmatrix} = \dots = \lambda^n \det\begin{pmatrix}a_1^t\\ a_2^t\\ \vdots\\ a_n^t\end{pmatrix}$$

✓

(D5) Vertausche Zeilen i und j.

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i^t\\ \vdots\\ a_j^t\\ \vdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j^t\\ \vdots\\ a_i^t\\ \vdots\end{pmatrix} \overset{D2}{=} \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i^t\\ \vdots\\ a_j^t\\ \vdots\end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j^t\\ \vdots\\ a_j^t\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i^t\\ \vdots\\ a_i^t\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_j^t\\ \vdots\\ a_i^t\\ \vdots\end{pmatrix}$$

lin in i-ter Zeile

~~lin in j-ter Zeile~~

$$= \det\begin{pmatrix}a_i^t + a_j^t\\ \\ a_j^t\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a_i^t + a_j^t\\ \vdots\\ a_i^t\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{lin in j-ter}\\ \text{Zeile}}}{=} \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_i^t + a_j^t\\ \vdots\\ a_j^t + a_i^t\\ \vdots\end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 0$$

(D6)
$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i^t \\ \vdots \\ a_j^t + \lambda a_i^t \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)_j}{=} \det\begin{pmatrix} a_i^t \\ a_j^t \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_i^t \\ a_i^t \end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i^t \\ \vdots \\ a_j^t \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

D1 + D5 + D6 erklären, was mit einer Determinante passiert, wenn elementare Zeilenumformungen vorgenommen werden:

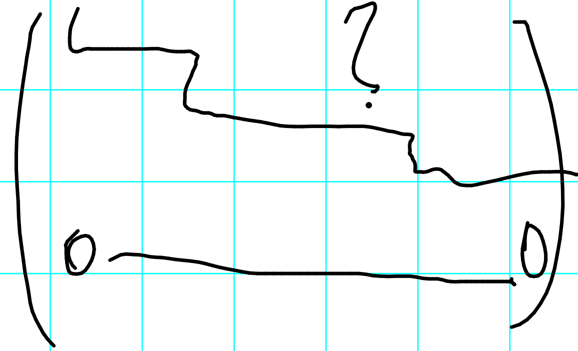
Mult. einer Zeile mit λ	$\hat{=}$	Mult. der Det mit λ	D1
Vertauschen zweier Zeilen	$\hat{=}$	Vorzeichenwechsel der Det.	
λ faches von i-ter Zeile zu $j$ter Zeile	$\hat{=}$	det ändert sich nicht.	

(Wir können also Determinante durch Gauß-Jordan bestimmen :))

(D7) Sei $\operatorname{rank} A < n$

$$\det A = (\text{diverse Faktoren und Vorzeichen}) \det B,$$

wobei B die Zeilenstufenform von A ist. B hat Gestalt



$\longleftarrow$ 0 Zeile. (mind. eine).

$$\det B = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lin. in} \\ n\text{-ter Zeile}}}{=} 0 \cdot \det B = 0$$

$\Longrightarrow \det A = 0.$

Für reguläre Matrizen kann Gauß-Jordan verwendet werden.

$$\det A = (\text{diverse Faktoren \& Vorzeichen}) \underbrace{\det I}_{=1} \overset{(D3)}{=} (\text{diverse Faktoren und Vorzeichen}).$$

$\Longrightarrow$ Es gibt höchstens eine Determinante
(d.h. es gibt höchstens eine Funktion, die (D1) – (D3) erfüllt.)

(D8) Wenn eine 0 auf der Diagonale steht, so ist Matrix singulär
(ZSF würde diese Spalte zu einer Nicht-Stufenspalte machen)
Lt. (D7) folgt $\det A = 0$. Produkt der Diagonalelemente auch 0.

Wenn alle Diagonalelemente $\neq 0$, dann ~~sind~~ ist Matrix in

Zeilenstufenform

Hebe Diagonalelemente heraus (D1), also Produkt der Diagonalelemente herausgeholen

$$\text{---} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Via Gauß-Jordan (letzte Phase)}$$

werden "über der Diagonalen "gratis" (ohne Änderung der Det) 0 erzeugt, also Einheitsmatrix." Diese hat Determinante 1

$$\Longrightarrow \det A = (\text{Produkt der Diagonalelemente}) \cdot 1$$

(D9) $$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \underbrace{0}_{k} & D \end{array}\right] \}k$$

<u>Fall 1</u>. B ist singulär. Es gibt $x \neq 0$ mit $Bx = 0$

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \}k = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow A \text{ singulär.}$$

$\overset{(D7)}{\Longrightarrow}$ $\det A = 0$ $\quad$ $\det B = 0$ $\quad \Longrightarrow \; 0 = 0 \cdot \det C$ ✓

<u>Fall 2</u> $\quad$ B ist regulär.

Wenn man A auf ZStufe bringt, dann wird zunächst B auf ZSTF gebracht und unteren Zeilen ignoriert.

$$B \longmapsto \left(\quad \right) = \tilde{B}$$

Dann wird ZSTF von D bestimmt.

$$D \longmapsto \tilde{D}$$

Jetzt ist es eine Dreiecksmatrix.

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{B} & ? \\ 0 & \tilde{D} \end{pmatrix} = \text{Produkt der Diagonalelemente } \begin{pmatrix} \tilde{B} & ? \\ 0 & \tilde{D} \end{pmatrix}$$

$$= \text{Prod der Diagelemente von } \tilde{B} \cdot \text{Prod der Diagelem. von } \tilde{D}$$

Vorfaktoren aufteilen $\Longrightarrow$ fertig. ✓

(D10) <u>Behauptung 1</u> $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ für die Matrizen A aus Ü6¹
(Zeilenumformungsmatrizen).

Vertauschungsmatrix V_{ij}

$$\det(V_{ij} B) \overset{(D5)}{=} -\det B = (-1) \det B =$$
$$= \det(V_{ij} \cdot I) \det B = \det V_{ij} \cdot \det B.$$

Ganz gleich für Mult. und $L_{ij}(\alpha)$ (nur +1 und D6).
$M_i(\alpha)$ (nur $\cdot \lambda$ und D7).

<u>Behauptung 2</u>. Wenn A oder B singulär, dann auch $A \cdot B$ singulär (Ü?)
also alles 0

allg. Fall für A regulär.

$$\underbrace{Z_N - \cdots\cdots Z_1}_{\text{Zeilenmatrizen irgendeiner Art}} \cdot A = I \qquad \text{(Gauß-Jordan)}$$

$$\Rightarrow \quad A = Z_1^{-1} \cdots \cdots Z_{N-1}^{-1} Z_N^{-1} \cdot I$$

diese Faktoren sind wieder Zeilenumformungsmatrizen

$$\det(AB) = \det\left(Z_1^{-1}\left(\cdots Z_N^{-1} \cdot B\right)\right) = \det Z_1^{-1} \cdot \det\left(Z_2^{-1} \cdots Z_N^{-1} B\right) =$$

$$= \det Z_1^{-1} \det Z_2^{-1} \det\left(Z_3^{-1} \cdots Z_N^{-1} B\right) =$$

$$= \left(\det Z_1^{-1} \cdots \det Z_N^{-1}\right) \det B = \cdots = \det\big(\underbrace{Z_1^{-1} \cdots Z_N^{-1}}_{A}\big) \det B.$$

✓

(D11) A regulär $\Rightarrow$ es gibt Inverse A^{-1} und 12.1.2010

$$1 \overset{(D3)}{=} \det I = \det\left(AA^{-1}\right) \overset{(D10)}{=} \det A \cdot \det A^{-1}$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \quad \text{und} \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

(D12) Wenn A singulär, so gilt $\det A = 0$ (cf (D7)), $\operatorname{rank} A < n$, also auch $\operatorname{rank} A^t < n$, A^t singulär und damit $\det A^t = 0$. (D7).

Wenn A regulär ist, dann gilt $A = Z_1^{-1} \cdots Z_N^{-1}$ für irgendwelche Zeilenumformungsmatrizen $Z_1, \dots, Z_N$.
Also sind auch $Z_1^{-1}, \dots, Z_N^{-1}$ Zeilenumformungsmatrizen

Man sieht leicht, dass $\det \left(Z_j^{-1}\right)^t = \det \left(Z_j^{-1}\right)$
(jeden der drei Fälle überprüft)

$$\det A^t = \det\left(\left(Z_1^{-1} \cdots Z_N^{-1}\right)^t\right) = \det\left(\left(Z_N^{-1}\right)^t \cdots \left(Z_1^{-1}\right)^t\right) =$$

$$\overset{(D10)}{=} \det\left(\left(Z_N^{-1}\right)^t\right) \cdots \det\left(\left(Z_1^{-1}\right)^t\right) =$$

$$= \det\left(Z_N^{-1}\right) \cdots \det\left(Z_1^{-1}\right)$$

$$\overset{K \text{ komm.}}{=} \det\left(Z_1^{-1}\right) \cdots \det\left(Z_N^{-1}\right)$$

$$\overset{(D10)}{=} \det\left(Z_1^{-1} \cdots Z_N^{-1}\right) = \det A.$$

Zwischenstand: Aus (D1)–(D3) folgen (D4)–(D12) und Eindeutigkeit.
Noch offen: Existenz und Formel mit Permutationen.

Plan: Zeige, dass expliziter Ausdruck (1) (D1)–(D3) erfüllt.

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}$$

(D1)

$$\det\begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_{i-1}^t \\ \lambda b^t + \mu c^t \\ a_{i+1}^t \\ \vdots \\ a_n^t \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{k\sigma(k)}\right) \cdot \left(\lambda b_{\sigma(i)} + \mu c_{\sigma(i)}\right) =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{k\sigma(k)}\right) b_{\sigma(i)} + \mu \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_{k\sigma(k)}\right) c_{\sigma(i)}$$

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} \vdots \\ b^t \\ \vdots \end{pmatrix} + \mu \det\begin{pmatrix} \vdots \\ c^t \\ \vdots \end{pmatrix}$$

✓

(D2) Seien $i<j$ und die i-te und die j-te Zeile von A gleich.

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \operatorname{sign} \sigma = 1}} \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}}_{=: x} - \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \operatorname{sign}(\sigma) = -1}} \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}}_{=: y}$$

Hoffnung: $x = y$.

$$y = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \operatorname{sign} \sigma = -1}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n} a_{k\sigma(k)} \right) \cdot \underset{\underset{a_{j\sigma(i)}}{\parallel}}{a_{i\sigma(i)}} \; \underset{\underset{a_{i\sigma(j)}}{\parallel}}{a_{j\sigma(j)}}$$

Setze lokal $\pi = \sigma \circ (i\,j)$ $\qquad \operatorname{sign} \pi = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \underbrace{\operatorname{sign}(i\,j)}_{-1} = -\operatorname{sign}(\sigma) = +1$

$\pi(i) = \sigma(j)$ $\qquad \pi(j) = \sigma(i)$

Für $k \notin \{i,j\}$ gilt $\pi(k) = \sigma(k)$

Wenn σ durch alle Permutationen mit $\operatorname{sign} \sigma = -1$ läuft, so läuft π durch alle Permutationen mit $\operatorname{sign} \pi = 1$

$$\Rightarrow \quad y = \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \operatorname{sign}\pi = 1}} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n} a_{k\pi(k)} \right) \cdot a_{j\pi(j)}\, a_{i\pi(i)} = \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \operatorname{sign}\pi = 1}} \prod_{k=1}^{n} a_{k\pi(k)} = x \quad \checkmark$$

(D3) In der Summe $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}$ tragen Permutationen σ, für die $a_{k\sigma(k)} = 0$ nichts bei. Wenn $A = I$, gibt es nur für $\sigma = \mathrm{id}$ einen Beitrag.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det I = \underbrace{\operatorname{sign}\mathrm{id}}_{1} \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \underbrace{\delta_{kk}}_{1}}_{1} = 1$$

$\square$

<u>Korollar 1</u>. $\det : K^{n \times n} \to K$ ist auch

(D1') linear in jeder Spalte

(D2') wenn zwei Spalten gleich sind, dann ist $\det A = 0$

(D5') Vertauschen zweier Spalten führt zu Vorzeichenwechsel der Det.

(D6') Addition des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte ändert für $i \neq j$ die Determinante nicht

(D8') det unterer Dreiecksmatrizen ist Produkt der Diagonalelemente

(D9') ... auch in Blockform ...

<u>Beweis</u> (D12) + passende Zeilenop + (D12) $\square$

<u>Korollar 2</u> Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann ist A genau dann regulär, wenn $\det A \neq 0$

<u>Beweis</u> „$\Rightarrow$" ist (D11)

„$\Leftarrow$" $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ nicht singulär (D7) $\Rightarrow A$ regulär $\square$

14.1.2010

<u>Korollar 3</u> Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathrm{vol}\left(\text{Parallelepiped}\,(x_1, \dots, x_n)\right) = \left|\det\,(x_1, \dots, x_n)^t\right|$$

<u>Beweis</u>. Add. i-ter zu j-ter Zeile ($i \neq j$) ändert weder vol noch $|\det(\dots)|$

Mult. i-ter Zeile mit α ~~a~~ multipl. sowohl vol als auch $|\det(\dots)|$ mit $|\alpha|$

Vertauschen zweier Zeilen ändert weder vol noch $|\det(\dots)|$

Vektor l.a. $\Rightarrow$ vol und $|\det(\dots)|$ sind 0

Standardbasis $\Rightarrow$ vol und $|\det(\dots)| = 1$

Wegen Gauß-Jordan erhalte dasselbe Ergebnisse $\square$

Definition: Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in K^{n\times n}$. Dann schreibe statt $\det A$ auch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

allerdings nicht $|A|$

Achtung Absolutbetrag.

Korollar 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Bemerkung. Etwas übersichtlicher wird es, wenn man die ersten 2 Spalten wiederholt.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

<u>Beweis</u> <u>$n=2$</u>. Verwende explizite Formel

Permutationen: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{sign}=1}$ $\qquad$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{sign}=-1}$ (weil transpos.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +\, a_{11}\, a_{22} \;-\; a_{21}\, a_{12}$$

<u>$n=3$</u>

$$\underset{+}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{+}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{+}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \overbrace{\underset{-}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \underset{-}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{-}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}^{\text{Transpos.}}$$

(Ex Ü 100 gibt es gleich viele positive wie negative Perm)

$\square$

Bemerkung. Die Regel $n=3$ heißt SARRUS-sche Regel.

Achtung. Für $n \geq 4$ gibt es mehr Summanden als Diagonalen,

$$\underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2}_{24} \qquad\qquad 8$$

Korollar 5. Sei K ein Körper, $R \subseteq K$ mit denselben Operationen ein komm. Ring mit 1 (alle Gesetze für Körper bis auf Existenz von multipl. Inversen), Wenn $A \in R^{n \times n}$, dann gilt auch $\det A \in R$.
(Spezialfall: wenn eine Matrix ganzzahlige Einträge hat, so ist auch Determinante ganzzahlig)

Beweis. In (1) treten sowieso keine Divisionen auf $\square$

Korollar 6. Sei $A \in K^{n \times n}$, $T \in K^{n \times n}$ invertierbar. Dann gilt
$$\det(T^{-1} A T) = \det(A).$$
(d.h. ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante).

Beweis.
$$\det(T^{-1} A T) \overset{(D10)}{=} \det(T^{-1}) \det A \det T = \det A \det(T^{-1}) \det(T) =$$
$$\overset{(D10)}{=} \det A \det(T^{-1} T) = \det(A) \det(I) \overset{(D3)}{=} \det(A) \cdot 1 = \det(A). \square$$

Somit haben alle Matrizen, die einen Endomorphismus bezüglich versch. Basen darstellen, dieselbe Determinante.

<u>Definition</u> Sei V ein endl.-dim K-Vektorraum und $F: V \to V$ ein Endomorphismus. Dann definiere die Determinante von F als die Determinante irgendeiner Matrixdarstellung von F.

„die Determinante ist eine <u>kanonische</u> Begriffsbildung"
$\hookrightarrow$ hängt nicht von Basis ab.

18. 1. 2010

Können wir der Determinante einer lin. Abb. eine geometrische Interpretation geben?

Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Endomorphismus.

Was passiert mit Determinanten (orientiertes Volumen) durch Abbildung?

$$\det(v_1, \dots, v_n)$$
$$\det(F(v_1), \dots, F(v_n))$$

Wenn $v_1, \dots, v_n$ l.a., so sind beide Determinanten 0.

Ab jetzt $v_1, \dots, v_n$ l.u., also bilden $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

Sei M die Matrixdarstellung von F bzgl. dieser Basis $v_1, \dots, v_n$.

$$M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

DSddM sdKdBdBv.

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$$\left(F(v_1) \dots F(v_n)\right) = (v_1, \dots, v_n) M$$

$$\Rightarrow \det\left(F(v_1), \dots F(v_n)\right) \underset{\text{mult. det}}{=} \det(v_1, \dots, v_n) \cdot \underbrace{\det M}_{= \det F.}$$

$$\Longrightarrow \det\left(F(v_1) \dots F(v_n)\right) = \det F \cdot \det(v_1, \dots, v_n).$$

Also:

<u>Proposition</u>. Sei $F: K^n \to K^n$ ein Endomorphismus und $v_1, \dots, v_n \in K^n$

Dann gilt

$$\det\left(F(v_1), \dots, F(v_n)\right) = \det F \cdot \det(v_1, \dots, v_n).$$

<u>Bemerkung</u>. $\det F$ gibt also den konstanten Skalierungsfaktor an, mit dem das Volumen eines Parallelepipeds zu multiplizieren ist, um das Volumen des Bildes des Parallelepipeds zu erhalten.

Beweis der Prop: Siehe dann, ersetze $\mathbb{R}^n$ durch K^n. $\square$

Als Zugabe beweisen wir zwei der Eigenschaften unter Verwendung der expliziten Formel (1):

Blockdreiecksform (D9):
$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \underbrace{0}_{k} & D \end{array}\right] \begin{matrix} \}k \\ \end{matrix}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

Es bringt nichts, auf Oen zu „setzen".
D.h. in unteren $n-k$ Zeilen „muss" auf letzten $n-k$ Spalten gesetzt werden.

Also: ein $\sigma \in S_n$ trägt höchstens dann zur Summe bei, wenn

$\sigma_B = \sigma|_{\{1,\dots,k\}}$ eine Permutation von $\{1,\dots,k\}$
$\sigma_D = \sigma|_{\{k+1,\dots,n\}}$ ——— " ——— $\{k+1,\dots,n\}$ usf.

$$\left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \cancel{0} & D \end{array}\right] \longleftarrow \text{bleibt unberücksichtigt}$$

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\operatorname{sign}\sigma}_{\operatorname{sign}\sigma_B\cdot\operatorname{sign}\sigma_C} \prod_{i=1}^{k} \underbrace{a_{i\sigma(i)}}_{a_{i\sigma_B(i)}} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \underbrace{a_{i\sigma(i)}}_{a_{i\sigma_D(i)}} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\sigma_B\in S_k} \operatorname{sign}\sigma_B \prod a_{i\sigma_B(i)}}_{\det(B)} \cdot \underbrace{\cancel{\operatorname{sign}} \sum_{\sigma_D\in S_{n-k}} \operatorname{sign}\sigma_D \prod a_{i\sigma_D(i)}}_{\det(D)}$$

✓

Determinante der Transponierten Matrix (D12).

Setze $B = A^t$ $\quad B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \quad A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und $b_{ij} = a_{ji}$

$$\det(A^t) = \det(B) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{j=1}^{n} b_{j\sigma(j)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

($j = \sigma^{-1}(\sigma(j))$; setze $i = \sigma(j)$, dann ist also $j = \sigma^{-1}(i)$

Während j die Zahlen $1,\dots,n$ durchläuft, durchläuft auch $i = \sigma(j)$ die Zahlen $1,\dots,n$ in anderer Reihenfolge)

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma^{-1}(i)}$$

$\Big(1 = \operatorname{sign} \mathrm{id} = \operatorname{sign} \sigma \circ \sigma^{-1} = \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \sigma^{-1}$

$\Rightarrow \operatorname{sign} \sigma^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{sign} \sigma} \underset{\Uparrow}{=} \operatorname{sign} \sigma$

bei ± 1 ist Kehrwert egal

und während σ die Menge S_n durchläuft, durchläuft auch σ^{-1} die Menge S_n, also: $\Big)$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign} \sigma^{-1} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma^{-1}(i)} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \det(A)$$

✓