4.4. Minoren, Streichungsmatrizen und Cramersche Regel

(18.10.2010)

Definition Sei $A \in K^{n \times n}$, $1 \leq k \leq n$, ein k-reihiger Minor ist die Determinante einer Teilmatrix von A, die durch Auswählen von k Zeilen und k Spalten aus A entsteht.
Der k-te Hauptminor ist die Determinante der Teilmatrix von A, die durch Auswählen der ersten k Zeilen und k Spalten gebildet wird.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = -4$ ist ein zweireihiger Minor von A

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -3$ ist der 2. Hauptminor von A.

Umformulierung von Satz 3.2: Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann besitzt A genau dann

* eine LR-Zerlegung, wenn alle Hauptminoren von A $\neq 0$ sind.

Wir betrachten in diesem Abschnitt vor allem $(n-1)$-reihige Minoren.

<u>Definition</u>. Sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$; $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Dann definiere

$$A_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

(aus A werden die i-te Zeile und die j-te Spalte gestrichen).

„Streichungsmatrix"

<u>Bemerkung</u> $\det A_{ij}$ ist also $(n-1)$-reihiger Minor.

<u>Lemma 1</u> Seien $a_1,\dots,a_n$ die Spalten von A und $e_1,\dots,e_n$ die Standardbasis.

Dann gilt

$$\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(a_1,\dots,a_{j-1}, e_i, a_{j+1},\dots,a_n)$$

j-te Spalte durch i-ten Standardbasisvektor ersetzt.

Beweis

$$\det A_{ij} = 1 \cdot \det A_{ij} = \det \underset{1\times 1\text{-Matrix}}{(1)} \cdot \det A_{ij} =$$

$$= \det \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c|c} 1 & \overset{j \text{ ausgel.}}{a_{i1} \cdots \cdots a_{in}} \\ \hline 0 & A_{ij} \end{array}\right] \end{array} = (-1)^{i-1} \det(e_i, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n) =$$

$$= \underbrace{(-1)^{j-1} \cdot (-1)^{i-1}}_{(-1)^{i+j}} \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

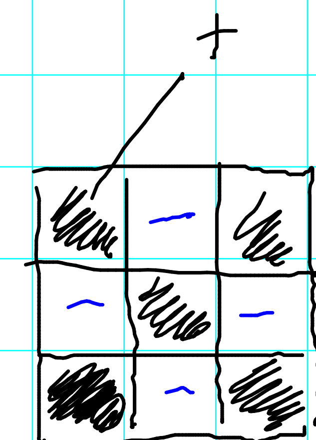
$\square$

Definition (Komplementärmatrix). Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann definiere

$$\mathrm{Kompl}(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_{ji} \right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1 \le j \le n}}$$

Beispiel $A \in K^{3\times 3}$

$$\mathrm{Kompl}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$A \in K^{2\times 2}$ $\quad$ $\text{kompl}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

<u>Lemma 2</u> Sei $A \in K^{n\times n}$, $c \in K^n$. $1 \le j \le n$. Dann gilt

$$\underbrace{(\text{kompl}(A) \cdot c)_j}_{j\text{-te Komponente}} = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, \underbrace{c}_{\text{ersetze } j\text{-te Spalte durch } c.}, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

<u>Beweis</u> Setze $B = \text{kompl}(A) = (b_{kj})_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$$(\text{kompl}(A) \cdot c)_k = (B \cdot c)_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \cdot c_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j (-1)^{k+j} \det A_{jk} =$$

$$\overset{\text{Lemma 1}}{=} \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{(-1)^{k+j} \cdot (-1)^{k+j}}_{=1} \det(a_1, \dots, a_{k-1}, e_j, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

$$= \det\Big(a_1, \dots, a_{k-1}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j e_j}_{=c}, a_{k+1}, \dots, a_n\Big) =$$

Lin in k-ter Spalte

$$= \det(a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n) \qquad \square$$

<u>Satz 4.3.</u> Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt

$$\operatorname{kompl}(A) \cdot A = A \cdot \operatorname{kompl}(A) = \det(A) \cdot I$$

<u>Beweis</u>. Betrachte j-te Spalte von $\operatorname{kompl}(A) \cdot A$ und davon die i-te Zeile:

$$(\operatorname{kompl}(A) \cdot a_j)_i \overset{\text{Lemma 2}}{=} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

a_j in der i-ten Spalte

$$= \begin{cases} \det(A) & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

(a_j in i-ter und in j-ter Spalte, also zwei gleiche Spalten)

$$\Longrightarrow \quad (\mathrm{kompl}(A)\cdot A)_{ij} = \det(A)\cdot \delta_{ij}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{kompl}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I.$$

$$\det(A)\cdot I = \det(A^t)\, I = (\det(A^t)\cdot I)^t =$$

$$= (\mathrm{kompl}(A^t)\cdot A^t)^t = A^{t^t}\ \mathrm{kompl}(A^t)^t =$$

$$= A \cdot \mathrm{kompl}(A)$$

$$\left(\mathrm{kompl}(A^t) = \left((-1)^{i+j} \det (A^t)_{ji}\right) = \left((-1)^{i+j} \det((A_{ij})^t)\right) = \left((-1)^{i+j} \det A_{ij}\right) = \right.$$

$$\left. = (\mathrm{kompl}(A))^t \right) \quad \square$$

Korollar 1 Wenn A eine reguläre $(n\times n)$-Matrix ist, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{kompl}(A).$$

Beweis
$$A \operatorname{kompl}(A) = \underbrace{\det A}_{\neq 0} \cdot I$$

$$\Rightarrow A \cdot \underbrace{\frac{1}{\det A} \operatorname{kompl}(A)}_{= A^{-1}} = I$$

$\Rightarrow$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

vgl Ü70 $\square$

Korollar 2 (Cramersche Regel) Sei $A \in K^{n\times n}$ regulär, $b \in K^n$, x die eind. Lsg von $Ax = b$. Dann gilt

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$x_i = \frac{}{\det(A)}$$ (im Zähler in i-ter Spalte das b statt des a_i)

für $1 \le i \le n$.

<u>Beweis</u> $Ax = b \iff x = A^{-1} b$

$\iff x = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{kompl}(A) \cdot b$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \left(\operatorname{kompl}(A) \cdot b\right)_i \overset{\text{Lemma 2}}{=} \frac{1}{\det(A)} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

$\square$

<u>Bemerkungen</u>. 1) Die Komplementärmatrix ist unter vielen Namen bekannt:
adjunkte Matrix, <u>adjungierte Matrix</u>
Achtung: Verwechslungsgefahr.

2) Cramersche Regel und expl. Inversendarst. sind für kleine Matrizen ($n=2$, vielleicht $n=3$) praktisch relevant, für größere Matrizen oft eher theoretisch interessant.

19.1.2010

3) Manchmal findet man auch transponierte Komplementärmatr.

Beispiel.

$$\begin{aligned} 7x + 5y &= 3 \\ 3x + 2y &= 7. \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-29}{-1} = 29$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{40}{-1} = -40$$

Korollar 3 Sei K Körper, $R \subseteq K$ ein komm. Ring mit 1, $A \in R^{n\times n}$ regulär (als Matrix in $K^{n\times n}$).
Dann ist A^{-1} genau dann in $R^{n\times n}$ enthalten, wenn $\det A$ in R invertierbar ist

Bemerkung $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ regulär besitzt genau dann ganzzahlige Inverse, wenn $\det A \in \{\pm 1\}$.

<u>Beweis</u> „$\Longrightarrow$" $1 = \det(I) = \det(A^{-1} \cdot A) = \underbrace{\det(A^{-1})}_{\in R} \underbrace{\det(A)}_{\in R} \Longrightarrow \det(A)$ ist in R invertierbar, das Inverse ist $\det(A^{-1})$.

„$\Longleftarrow$" $A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(A)}}_{\substack{\in R \\ \text{lt Vor}}} \cdot \underbrace{\text{komp}(A)}_{\in R^{n \times n}} \in R^{n \times n}$

$\square$

<u>Korollar 4</u> (Laplacescher Entwicklungssatz) Sei $A \in K^{n \times n}$.

1) Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

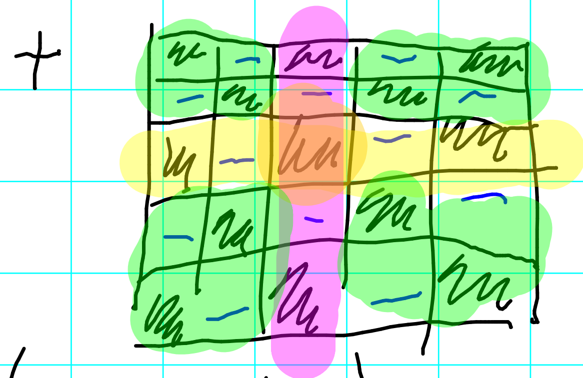
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

„Entwicklung nach i-ter Zeile"

2) Für $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}.$$

„Entwicklung nach j-ter Spalte".



Beweis. 1) $\left(A\cdot \mathrm{kompl}(A)\right)_{ii} = \det A$ lt. Satz 4.3. Schreibe wieder $\mathrm{kompl}(A) = (b_{ij})$,
$b_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

2) $$\det A = \left(\mathrm{kompl}(A)\cdot A\right)_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\det A_{ij}\,. \qquad \square$$

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} 1^{+} & 9^{-} & 0^{+} \\ 1 & 2 & 0^{-} \\ 1 & 0 & 8^{+} \end{vmatrix} = 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Entwickle nach letzter Spalte

$$= 0 - 0 + 8\cdot(1\cdot 2 - 1\cdot 9) = -56\,.$$

$\square$

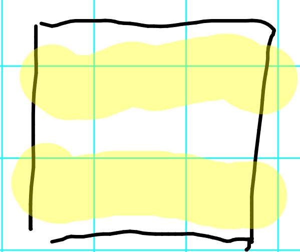
Bemerkung Auch der Entwicklungssatz führt zu $n!$ Summanden, ist also für große n praktisch nicht brauchbar, wohl aber theoretisch.

Satz 4.4. Sei $A \in K^{n \times n}$, dann gilt

$$\operatorname{rank} A = \max\{k \mid \text{es gibt } k\text{-reihigen Minor von } A \neq 0\}$$

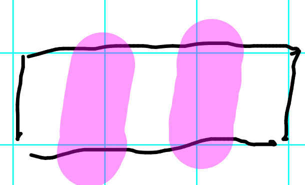
Lemma. $\operatorname{rank} A \geq k \iff$ es gibt k-reihigen Minor von $A \neq 0$.

Beweis des Lemmas. $\operatorname{rank} A \geq k \iff$ es gibt k l.u. Zeilen in A.

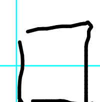
A 

~~Die~~ Eine Teilmatrix B von A, die aus k l.u. Zeilen besteht, hat also $\operatorname{rank} B = k$

$\iff$ es gibt k Spalten von B, die l.u. sind

B 

Sei jetzt C ~~die~~ eine Teilmatrix von B, die aus k l.u. Spalten besteht

C  $\iff$ C … $k \times k$-Matrix vom Rank k

$\Leftrightarrow \det C \neq 0$

$\det C$ ist k-reihiger Minor. $\square$

Beweis des Satzes. Wähle max. k, sodass die Aussagen des Lemmas erfüllt sind $\square$

Bemerkung ALLE Matrizen, deren Determinanten wir je betrachtet haben bzw. betrachten werden, sind QUADRATISCH.

21.1.2010

Nachträge zu Namen

- Eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ mit $\det A$ invertierbar in R (R Ring $\subseteq K$ Körper) nennt unimodulare Matrix
- Die explizite Formel $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}$ wird auch

Leibniz'sche Determinantenformel bezeichnet.