4.5. Allgemeiner Determinantenmultiplikationssatz

(21.1.2010)

Satz 4.5. (Allg. Det.Mult.) Sei $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times m}$. Dann gilt

$$\det(\underbrace{A \cdot B}_{m \times m}) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I| = m}} \det(\underbrace{A_I}_{m \times m}) \cdot \det(\underbrace{B^I}_{m \times m}),$$

wobei A_I jene Teilmatrix von A ist, die aus allen Zeilen und den Spalten aus I besteht

B^I —— " —— B —— " —— Spalten —— Zeilen —— " ——

(I ist in diesem nicht die Einheitsmatrix, diese wird nicht vorkommen.
Matlab/Octave: $A_I = A(:, I)$ $\quad B^I = B(I, :)$)

Bemerkung: Für $m > n$ ist die Summe leer, also 0
$\operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B) \leq n < m$,
$\Rightarrow$ $A \cdot B$ ist singulär und $\det(A \cdot B) = 0$.
Für $m = n$: ein Summand, nämlich $I = \{1, \dots, m\}$, also
ist die Aussage

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \qquad \square$$

Beweis des Satzes

$$\det(A \cdot B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{j\sigma(i)} \right)$$

$$(\;+\;\underset{j_1}{+}\;)(\;+\;\underset{j_2}{}\;+\;)(\;\underset{j_3}{}\;+\;+\;)(\;+\;\underset{j_4}{+}\;)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \sum_{1 \le j_1, j_2, \dots, j_m \le n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij_i}\, b_{j_i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{m} a_{ij_i}\, b_{j_i\sigma(i)} =$$

$$= \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{m} a_{ij_i} \cdot \prod_{i=1}^{m} b_{j_i\sigma(i)} =$$

$$= \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} \prod_{i=1}^{m} a_{i j_i} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{m} b_{j_i \sigma(i)} \right)$$

$$= \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} \prod_{i=1}^{m} a_{i j_i} \det \begin{pmatrix} b_{j_1}^t \\ \vdots \\ b_{j_m}^t \end{pmatrix} \qquad \left(B = \begin{pmatrix} b_1^t \\ \vdots \\ b_n^t \end{pmatrix} \right)$$

Wenn die $j_1, \dots, j_m$ nicht paarweise verschieden sind, steht hier eine Det mit mind. zwei gleichen Zeilen. Das brauchen wir also nicht berücksichtigen.

$$= \sum_{\substack{1 \le j_1, \dots, j_m \le n \\ j_1, \dots, j_m \\ \text{paarw. versch.}}} \prod_{i=1}^{m} a_{i j_i} \det \begin{pmatrix} b_{j_1}^t \\ \vdots \\ b_{j_m}^t \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=m}} \; \sum_{\substack{j_1,\dots,j_m \\ \{j_1,\dots,j_m\}=I}} \prod_{i=1}^{m} a_{i j_i} \det \begin{pmatrix} b^t_{j_1} \\ \vdots \\ b^t_{j_m} \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $\sigma : \{1,\dots,m\} \to I$ mit $i \mapsto j_i$ $\sigma(i) = j_i$ ist bijektiv. Also fast eine Permutation (weil das I leider nicht $\{1,\dots,m\}$, sondern irgendeine andere m-el. Teilmenge von $\{1,\dots,n\}$) Das ist aber nur ein Scheinproblem.

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=m}} \; \sum_{\substack{\sigma : \{1,\dots,m\} \to I \\ \text{Permutation}}} \left(\prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)} \right) \underbrace{\det \begin{pmatrix} b^t_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ b^t_{\sigma(m)} \end{pmatrix}}_{\operatorname{sign}\sigma \;\; \det B^I}$$

(Ü98 b+c)

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=m}} \det B^I \sum_{\substack{\sigma : \{1,\dots,m\} \to I \\ \text{Permut.}}} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| = m}} \det B^I \cdot \det A_I \qquad \square$$