4.6. Kreuzprodukt

Dieser Abschnitt befasst sich nur mit $\mathbb{R}^3$.

<u>Definition.</u> Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann setze

$$a \times b = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

„Kreuzprodukt von a und b"

Versuche das, als 3×3-Determinante zu sehen ...

$$a \times b = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + (-1) e_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

kleine Gewissensbisse: Vektor · Skalar statt umgekehrt

$$= \begin{vmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$\uparrow$

Entwicklung nach 1. Spalte

Große Gewissensbisse: Vektoren als Einträge von Matrizen.

eigentlich illegal ...

Ausweg 1: Sehe die 3x3 Determinante nur als Gedächtnisstütze.

Ausweg 2: „Unorthodoxe Definition":

Neuer Körper: $K(X)$ .... Quotienten von Polynomen aus $K[X]$

„rationale Funktionen in X"

z.B. $\dfrac{X^2+25X+11}{16X+27}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ X & a_2 & b_2 \\ X^2 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - X \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + X^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Φ_B ... Koord. abb. bzgl Basis $1, X, X^2$ $\Phi_B\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = u + vX + wX^2$

$$\Longrightarrow \quad a \times b = \Phi_B^{-1}\left(\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ x & a_2 & b_2 \\ x^2 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

legal, aber vielleicht unorthodox.

sehe das als Legalisierung obigen Notationsmissbrauchs.

Satz 4.6 (Rechenregeln für Kreuzprodukt). Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

1) $a \times (b + d) = (a \times b) + (a \times d)$
   $a \times (\alpha b) = \alpha \cdot (a \times b)$ } Linearität im 2. Argument.

2) $(a + c) \times b = (a \times b) + (c \times b)$
   $(\alpha a) \times b = \alpha\,(a \times b)$ } Linearität im 1. Argument

3) $b \times a = -\, a \times b$

4) $a \times a = 0$.

5) $\langle a \times b, a \rangle = \langle a \times b, b \rangle = 0$, wobei

$$\left\langle \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \right\rangle = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3$$

(Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$)

Beweis. 1) $a \times (b+d) = \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & a & b+d \\ e_3 & & \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & a & b \\ e_3 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & a & d \\ e_3 & & \end{vmatrix} = (a \times b) + (a \times d)$

Linearität der

Determinante in 3. Spalte.

$$a \times \alpha b = \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & a & \alpha b \\ e_3 & & \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & a & b \\ e_3 & & \end{vmatrix} = \alpha (a \times b)$$

2) analog zu 1, nur spielt sich alles in der 2. Spalte ab

3) $b \times a = \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & b & a \\ e_3 & & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & a & b \\ e_3 & & \end{vmatrix} = -(a \times b)$

4) $a \times a = \begin{vmatrix} e_1 & & \\ e_2 & a & a \\ e_3 & & \end{vmatrix} \underset{DZ^t}{=} 0$ RR für Det verwendet.

5) $\langle a \times b, a \rangle = a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & a & b \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle a \times b, b \rangle = \ldots \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} b & a & b \end{pmatrix} = 0$$

$\square$

<u>Bemerkung</u> 5) ist ein Spezialfall des sog. Spatprodukts:

$$\langle c, a \times b \rangle = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \det(c, a, b)$$

Man kann jede RR für die Spalten einer Determinante umrechnen in RR für Spatprodukt.

$\Rightarrow$ $|\langle c, a \times b \rangle| = |\det(c, a, b)|$ = Volumen des Parallelepipeds, das von a, b, c aufgespannt wird