Kapitel 5 Mehr über Vektorräume in Zusammenhang mit lin. Abb

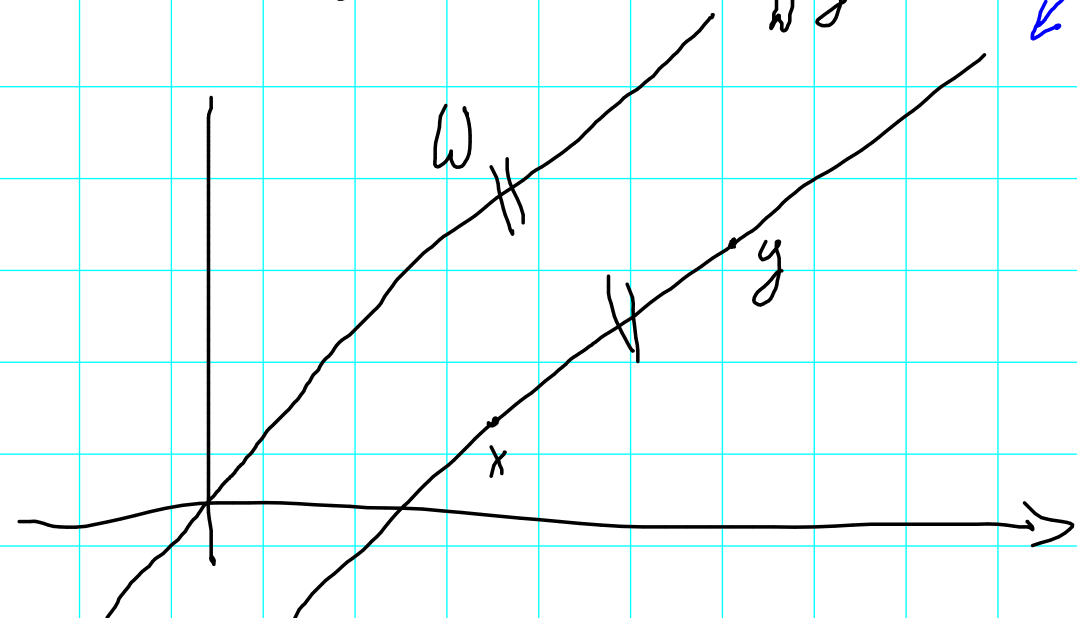
5.1 Quotientenräume

Definition V ein K-Vektorraum, $W \leq V$. Dann nenne zwei Vektoren $x, y \in V$ äquivalent bezüglich W, wenn

$$x - y \in W.$$

Wir schreiben $x \sim_W y$

Beispiel



Blickrichtung

„Sehe" x und y als einen „Punkt"

(Projektion)

Proposition Das der eingeführte $\sim_W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V, die Äquivalenzklasse von x ist der affine Unterraum $x + W$.

(zur Wh.: eine AR ist reflexiv: $\forall x: x \sim_W x$

symmetrisch: $\forall x,y: x \sim_W y \to y \sim_W x$

transitiv: $\forall x,y,z: x \sim_W y \wedge y \sim_W z \to x \sim_W z$

Äquivalenzklasse von x $= \{ y \in V: x \sim_W y \}$)

<u>Beweis</u> 1) reflexiv. $\forall x \in V: 0 = x - x \in W \iff x \sim_W x$

2) symmetrisch: $\forall x, y \in V$:

Wenn $x \sim_W y$, dann $x - y \in W \Rightarrow -(x-y) = y - x \in W \iff y \sim_W x$

3) transitiv.

Seien $x, y, z \in V$ mit $x \sim_W y$ und $y \sim_W z$.

$\Rightarrow x - y \in W$ und $y - z \in W \Rightarrow (x-y) + (y-z) = x - z \in W \iff x \sim_W z$

4) Äquivalenzklasse von $x = [x]_{\sim_W} = \{ y \in V \mid x \sim_W y \} =$

$= \{ y \in V \mid y \sim_W x \} = \{ y \in V \mid y - x \in W \} = \{ y \in V \mid \exists w \in W: y - x = w \} =$

$= \{ y \in V \mid \exists w \in W: y = x + w \} = \{ x + w \mid w \in W \} = x + W.$ $\square$

Proposition Die Relation $\sim_W$ ist eine Kongruenzrelation, d. h.

1) $\forall\, a, b, c, d \in V$: $\quad a \sim_W b$ und $c \sim_W d \longrightarrow a + c \sim_W b + d$.
2) $\forall\, a, b \in V\ \forall\, \alpha \in K$: $\quad a \sim_W b \longrightarrow \alpha a \sim_W \alpha b$.

($\sim_W$ ist mit algebr. Operationen verträglich)

Beweis.

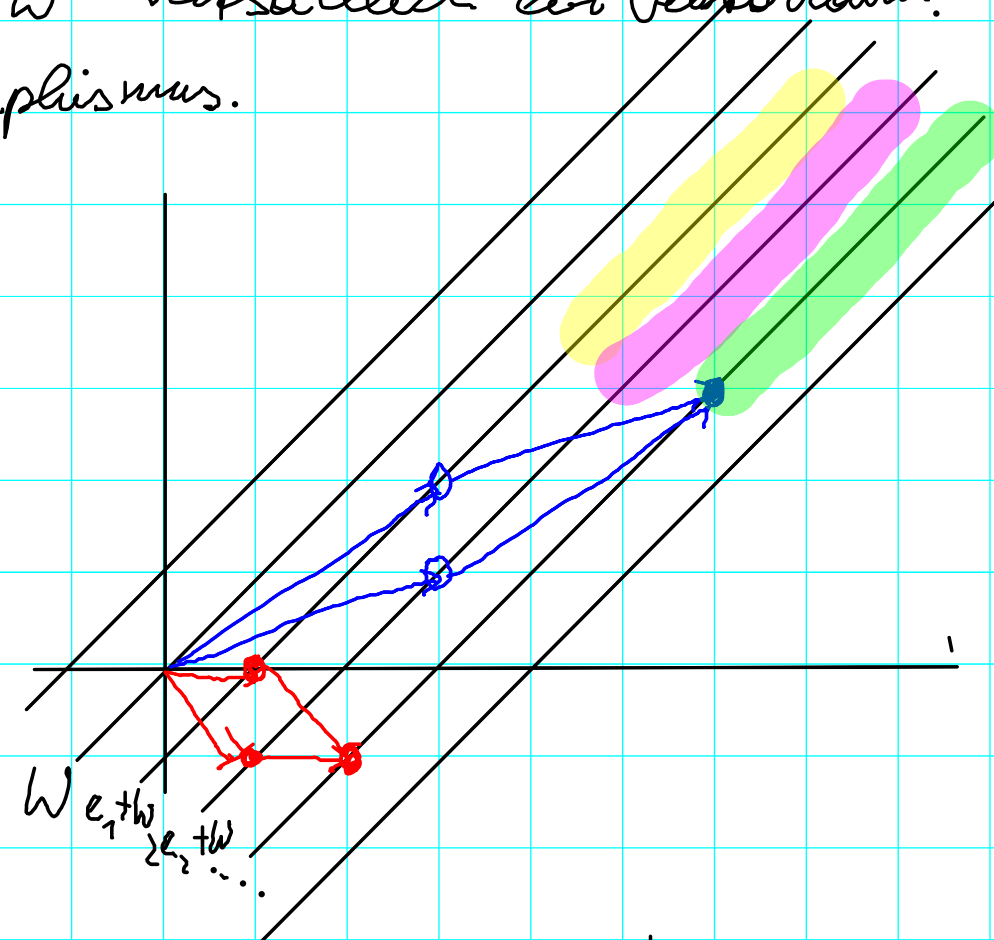
1) $$\left.\begin{array}{l} a - b \in W \\ c - d \in W \end{array}\right\} + \Longrightarrow (a+c) - (b+d) \in W$$

2) $$a - b \in W \Longrightarrow \alpha(a-b) = \alpha a - \alpha b \in W$$ $\square$

Definition Seien V ein K-Vektorraum, $W \leq V$. Dann heißt
$$V/W := \{x + W \mid x \in V\}$$
der Quotientenvektorraum von V nach W, auf dem man die Operationen
$$+ : V/W \times V/W \longrightarrow V/W \text{ mit } (x+W) + (y+W) = (x+y) + W$$
$$\cdot : K \times V/W \longrightarrow V/W \text{ mit } \alpha \cdot (x+W) = \alpha x + W$$
definiert. Weiters definiert man die kanonische Projektion π_W auf W durch
$$\pi_W : V \to V/W \text{ mit } \pi_W(x) = x + W$$

Satz 5.1. Unter obigen Voraussetzungen ist V/W tatsächlich ein Vektorraum. Die Abbildung π_W ist ein Epimorphismus.

Beweis Wir zeigen zunächst, dass die Addition und die Skalarmultiplikation nicht von den gewählten Repräsentanten abhängig ist.



1) „Wohldefiniertheit" der Addition

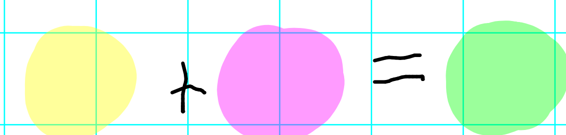
Annahme: $x+W = x'+W$

$y+W = y'+W.$

Wir wollen zeigen:

$$(x+y)+W = (x'+y')+W.$$

Die Objekte (= Vektoren) von V/W sind die Geraden mit Steigung 1



Also $x+W = x'+W \iff x \sim_W x'$

$y+W = y'+W \iff y \sim_W y'$

Wenn beim „blauen Experiment" was anderes herausgekommen wäre als beim „roten Experiment", hätten wir ein Problem.

Da $\sim_W$ eine Kongruenzrelation ist, folgt $x+y \sim_W x'+y'$, also

Die Definitionen wären sinnlos gewesen.

$$(x+y)+W = (x'+y')+W \checkmark$$

2) Wohldefiniertheit der Skalarmult.

$$x+W = x'+W \Rightarrow x \sim_W x' \Rightarrow \alpha x \sim_W \alpha x' \Rightarrow \alpha x + W = \alpha x' + W.$$

3) Jetzt sind 8 Gesetze nachzurechnen.

z.B.

$$\alpha \cdot \big((x+W) + (y+W) \big) = \alpha \big((x+y)+W \big) = \big(\alpha(x+y)\big)+W = (\alpha x + \alpha y) + W =$$

$$= (\alpha x + W) + (\alpha y + W) = \alpha(x+W) + \alpha(y+W).$$

allgemeines Rezept: umformen auf $(\quad\quad) + W$, dann alles Gesetz anwenden und zurückumformen auf das Gewünschte.

4) π_W ist Epimorphismus.

$$\left.\begin{aligned} \pi_W(x+y) &= (x+y)+W = (x+W)+(y+W) = \pi_W(x) + \pi_W(y) \\ \pi_W(\alpha x) &= (\alpha x)+W = \alpha(x+W) = \alpha\,\pi_W(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi_W \text{ ist linear}$$

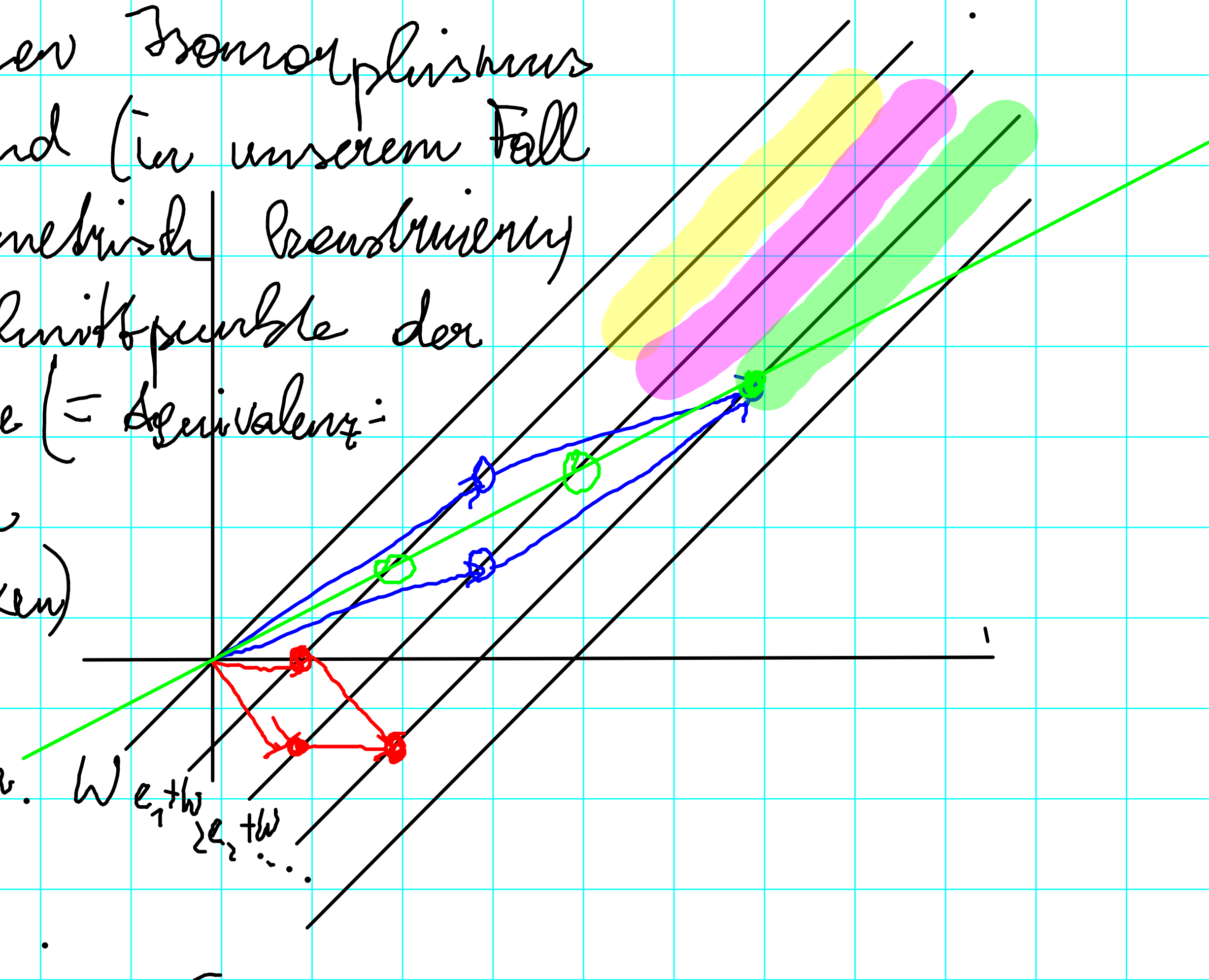
Sei $x+W \in V/W$. Dann gilt $x+W = \pi_W(x)$ $\Rightarrow$ surjektiv. $\square$

<u>Korollar.</u> Wenn V endlichdim. ist, so erhält man
$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

<u>Beweis</u>
$$\dim V/W = \dim \operatorname{Im} \pi_W = \dim V - \dim \underbrace{\operatorname{Ker} \pi_W}_{W} = \dim V - \dim W.$$
$$\Big(\operatorname{Ker} \pi_W = \{ x \in V \mid x + W = 0 + W \} = \{ x \in V \mid x \sim_W 0 \} =$$
$$= \{ x \in V \mid x - 0 \in W \} = \{ x \in V \mid x \in W \} = W \Big) \quad \square$$

<u>Bemerkung</u> In diesem Abschnitt war viel mehr Algebra als lineare Algebra.
D.h. viele Verallgemeinerungen in andere algebr. Strukturen

Wir können einen Isomorphismus zwischen V/W und (in unserem Fall $\mathbb{R}$) dadurch geometrisch konstruieren, dass wir die Schnittpunkte der affinen Unterräume (= Äquivalenzklassen) mit einer beliebigen (aber fixen) Geraden durch Ursprung betrachten.



Satz 5.2 Seien V und U zwei K-Vektorräume, $F: V \to U$ eine lineare Abbildung, $W = \operatorname{Ker} F$. Dann ist die Abbildung $G: V/W \to U$ mit $G(x+W) = F(x)$ ein wohldefinierter Vektorraummonomorphismus.

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_W"'] & U \\ V/W \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, also $F = G \circ \pi_W$

Falls F ein Epimorphismus ist, dann ist G ein Isomorphismus

__Beweis.__ 1) G ist wohldefiniert.

Wenn $x + W = y + W$, so gilt $x \sim_W y$, also $x - y \in W$, daher gibt es $w \in W$ mit $x - y = w$. $\Rightarrow$ $x = y + w$.

$$F(x) = F(y+w) = F(y) + \underbrace{F(w)}_{\in W = \operatorname{Ker} F} = F(y) + 0 = F(y)$$

Also $F(x) = F(y)$, d.h. $G(x+W) = F(x)$ hängt nicht von Repräsentanten der Äquivalenzklasse ab.

2) G ist linear.

$$G\big(\alpha(x+W) + \beta(y+W)\big) \underset{\substack{RR\ in\\ V/W}}{=} G\big((\alpha x + W) + (\beta y + W)\big) \underset{\substack{RR\\ in\ V/W}}{=} G\big((\alpha x + \beta y) + W\big)$$

$$\overset{\text{Def von } G}{=} F(\alpha x + \beta y) \overset{F \text{ lin.}}{=} \alpha F(x) + \beta F(y) \overset{\text{Def von } G}{=} \alpha G(x+W) + \beta G(y+W). \quad ✓$$

3) G ist injektiv.

Es gelte $G(x+W) = G(y+W)$. $\overset{\text{Def } G}{\Longrightarrow} F(x) = F(y)$

$\Longrightarrow F(x) - F(y) = 0 \overset{F \text{ lin.}}{\Longrightarrow} F(x-y) = 0 \Longrightarrow x-y \in \ker F = W$

$\Longrightarrow x \sim_W y \Longrightarrow x+W = y+W$ ✓

4) $G \circ \pi_W(x) = G(\pi_W(x)) = G(x+W) = F(x)$ für alle x ✓

5) Denn F surjektiv ist, folgt G surjektiv.

Sei $u \in U$. Dann gibt es $x \in V$ mit $F(x) = u \Longrightarrow G(x+W) = u$

$\Longrightarrow G$ surjektiv

$\square$