5.2. Dualraum

<u>Definition</u>. Sei V ein K-Vektorraum. Dann definiere den Dualraum V^* von V als

$$V^* = \{ f : V \to K \mid f \text{ linear} \}$$

Die Elemente von V^* heißen auch lineare Funktionale.

<u>Proposition</u> Sei V ein endl.-dim K-Vektorraum, B eine feste Basis von V. Sei

$$\mathcal{M} : V^* \longrightarrow K^{1 \times n} \,; \quad \mathcal{M}(f) \dots \text{Matrixdarst. von } f \text{ bzgl der Basis } B \text{ von } V \text{ und } (1) \text{ von } K,$$

wobei $n = \dim V$. Dann ist $\mathcal{M}$ ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere gilt $\dim V^* = n$

<u>Beweis</u>. $B = (b_1, \dots, b_n)$.

$$\mathcal{M}(f) = (f(b_1), \dots, f(b_n))$$

$$\mathcal{M}(\alpha f + \beta g) = ((\alpha f + \beta g)(b_1), \dots, (\alpha f + \beta g)(b_n)) =$$

$$= (\alpha f(b_1) + \beta g(b_1), \dots, \alpha f(b_n) + \beta g(b_n)) =$$

$= \alpha\big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big) + \beta\big(g(b_1), \dots, g(b_n)\big) = \alpha\mathcal{M}(f) + \beta\mathcal{M}(g)$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{M}$ ist linear.

- Injektivität

  Sei $f \in \operatorname{Ker} \mathcal{M}$, also $0 = \mathcal{M}(f) = \big(f(b_1), \dots, f(b_n)\big)$, also $f(b_1) = \dots = f(b_n) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$ für alle $x \in V \Longrightarrow f = 0$

- Surjektivität

  Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^{1 \times n}$ gegeben. Es gibt lin. Abb. $f : V \to K$ mit $f(b_1) = a_1, \dots, f(b_n) = a_n \Longrightarrow \mathcal{M}(f) = a$. $\square$

<u>Definition.</u> Sei V ein K-Vektorraum, $(b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Definiere $(f_i)_{i \in I}$ aus V^* durch

$$f_i(b_j) = \delta_{ij}. \qquad \text{(Kronecker-Delta)}$$

Dann heißen die $(f_i)_{i \in I}$ die Koordinatenformen zu $(b_i)_{i \in I}$.

<u>Beispiel 1.</u> K^n mit Standardbasis (e_i).

$f_i(x) = a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n$ für passende a_{ij}.

$$\delta_{ij} = f_i(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij}$$

$$f_i(x) = x_i$$

28.1.2010

Beispiel 2. $V = K^2$ mit Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_1(b_1) = 1$ $\quad$ $f_1(b_2) = 0$

$f_2(b_1) = 0$ $\quad$ $f_2(b_2) = 1$

Matrixdarst von f_1 bzgl Basis (b_1, b_2) von V und 1 von K:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das auf Standardbasis transformieren.

Zielraum K: Transformationsmatrix (1)

Ausgangsraum:

alte Basis durch neue Basis ausgedrückt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Um neue Basis durch alte auszudrücken:

$$T^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Multipliziere

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_1(x) = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$. $\qquad f_1(b_1) = 1 \qquad f_1(b_2) = 0$

Gleiche Überlegung für f_2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$f_2(x) = x_1 - x_2$

Proposition. Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis des K^n, $T = (b_1, \ldots, b_n)$.
Dann ist die Matrixdarstellung der i-ten Koordinatenform

f_i die i-te Zeile von T^{-1}.

Beweis. Privatvergnügen. $\square$

Satz 5.3. Sei V ein K-Vektorraum, $(b_i)_{i\in I}$ eine Basis von V, die $(f_i)_{i\in I}$ die zugehörigen Koordinatenformen. Dann ist $(f_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

Weiters sind die $(f_i)_{i\in I}$ genau dann eine Basis von V^*, wenn V endlich-dimensional ist.

Beweis. 1) Beh. $(f_i)_{i\in I}$ sind l.u.

Annahme:

$$\alpha_1 f_{i_1} + \dots + \alpha_k f_{i_k} = 0. \qquad i_1, \dots, i_k \text{ paarw. versch. aus } I. \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$$

Setze b_{i_j} ein,

$$\alpha_1 \underbrace{f_{i_1}(b_{i_j})}_{0} + \dots + \alpha_j \underbrace{f_{i_j}(b_{i_j})}_{1} + \dots + \alpha_k \underbrace{f_{i_k}(b_{i_j})}_{0} = 0$$

$$\alpha_j = 0$$

$\Longrightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ✓

2) <u>Beh.</u> Wenn $\dim V = n < \infty$, so ist $(f_1, \dots, f_n)$ eine Basis von V^*.

Wir wissen bereits, dass $\dim V^* = n$, $(f_1, \dots, f_n)$ sind n-elementiges l.u. System in V^*, also ist das aus Dimensionsgründen eine Basis

3) <u>Beh</u> Wenn $\dim V$ unendlich, so ist $(f_i)_{i \in I}$ kein Erzeugendensyst.

Wir betrachten jenes lin Fn $g: V \to K$ mit

$g(b_i) = 1$ für alle $i \in I$.

<u>Indirekt</u>: Annahme:

$g = \alpha_1 f_{i_1} + \dots + \alpha_k f_{i_k}$ für $k \in \mathbb{N}$

$i_1, \dots, i_k \in I$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$.

Wir wählen ein $b_j \in \{ b_i : i \in I \} \setminus \{ b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \}$ (also ein Basiselement, das zu keiner der Koord. formen „gehört")

$$1 = g(b_j) = \alpha_1 \underbrace{f_{i_1}(b_j)}_{0} + \ldots + \alpha_k \underbrace{f_{i_k}(b_j)}_{0} = 0$$

Widerspruch. $\square$

<u>Definition</u>. Sei V endl.-dim, $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, $(f_1, \ldots, f_n)$ die zugehörigen Koordinatenformen. Dann heißt $(f_1, \ldots, f_n)$ die zu $(b_1, \ldots, b_n)$ duale Basis von V^*.