5.3. Bidualraum

Definition. Sei V ein K-Vektorraum, V^* sein Dualraum, und $(V^*)^*$ der Dualraum des Dualraums V^*. Dann heißt $(V^*)^* = V^{**}$ der Bidualraum von V.

Sei $x \in V$ und definiere $ev_x : V^* \to K$ durch $ev_x(f) = f(x)$.

Vielleicht ist $ev_x \in V^{**}$? Wir müssen nur Linearität überprüfen:

$$ev_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha\, ev_x(f) + \beta\, ev_x(g)$$

$\Rightarrow$ ev_x ist linear und daher $ev_x \in V^{**}$. $\qquad ev_x$ ... Evaluation an x,

Satz 5.5. Sei V ein K-Vektorraum, $\Psi : V \to V^{**}$; $\Psi(x) = ev_x$.
Dann ist Ψ Homomorphismus.
Für endl.-dim K-Vektorräume ist Ψ ein Isomorphismus.

Beweisskizze. Ψ linear ... Privatvergnügen

linear

Sei $x \in \operatorname{Ker} \Psi$, d.h. $ev_x = 0 \in V^{**}$, also $\forall f: V \to K$: $ev_x(f) = 0$, also $f(x) = 0$ für alle lin. Fn. $f: V \to K$.

Falls $x \neq 0$, so erweitere x zu Basis von V und definiere lin. Abb mit $f(x) = 1$ und Rest egal, Wid.

$\Rightarrow \operatorname{Ker} \Psi = \{0\}$

endldim: $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. $\square$