1) $\frac{z+i}{z-i} = z-1 \quad \Big| \cdot (z-i)$ (außer wenn $z-i=0$, also $z=i$, $\frac{2i}{0} = i-1$ f. A)

$z+i = (z-1)(z-i)$

$z\cancel{+i} = z^2 - z - iz \cancel{+i} \quad \Big| -z$

$0 = z^2 - 2z - iz$

$0 = z(z-2-i)$

$0 = z(z-(2+i))$

2 Lösungen: $z=0$ oder $z=2+i$

2) $W = \operatorname{span}\left((1,2,5)^t, (6,7,0)^t, (1,1,-1)^t\right)$ (3)

ges. Basis.

Versuch:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ III: $5 = -\beta \quad \beta = -5$

I: $1 = 6\alpha - 5 \Rightarrow \alpha = 1$

II: $2 = 1 \cdot 7 - 5 \cdot 1$ ✓

Kann Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ weglassen,

Frage: Sind $\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ l.u. ?

Versuche $\alpha \cdot \begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\text{III} \quad 0 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$
$$\text{II} \quad 7\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Wie erwartet sind $\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ l.u. und daher Basis von W.

(3)

3) $P_3 = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq 3 \}$
$W = \{ f \in P_3 \mid f(0) = f(1) = 0 \}$.

z.z. W UVR; Basis von W ?

ad UVR: Seien $f, g \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(0) &= \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\\ (\alpha f + \beta g)(1) &= \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in W.$$

$\deg(\alpha f + \beta g) \leq 3$ ✓

$0 \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$

ad Basis $\quad f = a + bX + cX^2 + dX^3.$

$0 = f(0) = a$

$0 = f(1) = a + b + c + d \quad \Rightarrow \quad d = -b - c.$

$f \in P_3 \quad \Leftrightarrow \quad f = bX + cX^2 + (-b-c)X^3 =$

$= b(X - X^3) + c(X^2 - X^3)$

$\Rightarrow \quad W = \operatorname{span}\left((X - X^3), X^2 - X^3\right).$

Überprüfe l.u.: $\quad b(X - X^3) + c(X^2 - X^3) = 0.$

$$\left.\begin{array}{lrl} X^3: & -b-c & = 0 \\ X^2: & c & = 0 \\ X: & b & = 0 \\ 1: & 0 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow \text{l.u.}$$

Basis ist $\underline{X - X^3, X^2 - X^3}$ (6)

4) $W = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mid x_n \in \mathbb{R}, \ x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n \text{ für } n \geq 0 \}$

a) W UVR.

~~Seien~~ Nullfolge $\in W$.

$(x_n), (y_n) \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad z_n = \alpha x_n + \beta y_n$.

$$z_{n+2} = \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2} = \alpha(x_{n+1} + 6x_n) + \beta(y_{n+1} + 6y_n) =$$

$$= \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} + 6(\alpha x_n + \beta y_n) = z_{n+1} + 6 z_n$$

$\Rightarrow z_n \in W$.

b) z.Z. $(-2)^n \in W$ $\qquad 3^n \in W$

$\Leftrightarrow (-2)^{n+2} \overset{?}{=} (-2)^{n+1} + 6\cdot(-2)^n \quad |:(-2)^n$

$\Leftrightarrow (-2)^2 \overset{?}{=} -2 + 6\cdot 1$ ✓

$\Leftrightarrow$ $3^{n+2} \overset{?}{=} 3^{n+1} + 6\, 3^n \quad |:3^n$

$3^2 = 3 + 6$ ✓

c) l.u. $\quad \alpha\cdot(-2)^n + \beta\cdot 3^n = 0$

$n=0: \quad \alpha + \beta = 0 \qquad \alpha = -\beta$.

$n=1: \quad -2\alpha + 3\beta = 0 \qquad \Rightarrow 5\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$.

$\Rightarrow$ die beiden Folgen sind l.u.

Erz. Syst. $\quad$ Sei $(x_n) \in W$.

$(*) \quad x_n = \alpha\cdot(-2)^n + \beta\cdot 3^n$

$n=0: \quad x_0 = \alpha + \beta \quad |\cdot 2$

$n=1 \quad x_1 = -2\alpha + 3\beta$

$$2x_0 + x_1 = 5\beta \Longrightarrow \beta = \frac{2x_0 + x_1}{5}$$

$$\alpha = x_0 - \beta = x_0 - \frac{2x_0 + x_1}{5} = \frac{3x_0 - x_1}{5}$$

(*) stimmt für $n=0$ und $n=1$ und daher, weil auf beiden Seiten Folgen aus W stehen, auch für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $\square$

(8)