1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Es sei $U(r,\varphi) = f(x,y)$ mit $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Drücken Sie $U_r, U_\varphi, U_{rr}, U_{r\varphi}, U_{\varphi\varphi}$ durch $f$ bzw. Ableitungen von $f$ aus. Drücken Sie $f_x, f_y, f_{xx} + f_{yy}$ durch $U$ bzw. Ableitungen von $U$ aus.

2. Zeigen Sie:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \text{ für } f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

3. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion $f(x,y,z) = z$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8z = 0$ und $x + y + z = 0$. Wie sieht die durch die Nebenbedingungen beschriebene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ aus?

4. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale (Hinweis: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ und partielle Integration):

   (a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)^3\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)^3\cos(x)^7\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)^4\,dx.$

5. Berechnen Sie die Summen

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x,$

   indem Sie die Formel $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ verwenden.

   Sonstiges:
   Im Teach Center sind weitere Info zu Analysis T1 und Analysis T2, und ein Forum, auf dem Sie über die Hausübungen diskutieren können.
   Webinterface für die Übungen:

   https://www.math.tugraz.at/onlinekreuze/onlinekreuze.phtml?lv=501455s11

   Ankreuzschluß Donnerstag 13.45.
   Studierende mit einer Terminkollission bei der Übung bitte per email bei C Elsholtz melden.

   Dienstags: 2 Stunden Vorlesung von 10.15 an, dann das Konversatorium.

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy,$$

wobei $B$ das Rechteck $B = [-1,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ist, für die Funktionen
a) $f(x,y) = x\sin(y) - ye^x$ und b) $f(x,y) = \sin(x)^2\cos(y)^2$.

7. Berechnen Sie das Integral:

$$\iint_B x^2y\,dxdy,$$

Dabei ist der Bereich $B$ das
a) Dreieck mit den Ecken (0,0), (1,0), (0,1)
b) Dreieck mit den Ecken (0,1), (0,–1), (1,0)
c) Innere der Ellipse mit Halbachsen $a$, $b$ in Hauptlage.

8. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B (x+y)^2\,dx\,dy$$

über die folgenden Bereiche

(a) $B = [-1,1] \times [0,2]$
(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x^3 \leq y \leq x\}$
(c) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$
(d) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + |y| \leq 4\}$

9. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B xy(x+y)\,dx\,dy$$

über $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x, y \geq 0\}$.

Sonstiges:
Im Teach Center sind weitere Info zu Analysis T1 und Analysis T2, und ein Forum, auf dem Sie über die Hausübungen diskutieren können.
Webinterface für die Übungen:

https://www.math.tugraz.at/onlinekreuze/onlinekreuze.phtml?lv=501455s11

Ankreuzschluß Donnerstag 13.45.
Studierende mit einer Terminkollission bei der Übung bitte per email bei C Elsholtz melden.

Dienstags: 2 Stunden Vorlesung von 10.15 an, dann das Konversatorium.

10. a) Eine Kugel vom Radius $R$ werde von einer Ebene geschnitten, die vom Kugelmittelpunkt den Abstand $R/2$ hat. Berechnen Sie durch Integration das jeweilige Volumen der beiden Kugelanteile.

    b) Die Kugel habe eine homogene Massenverteilung, d.h. die Dichte $\rho$ sei konstant. Berechnen Sie die Trägheitsmomente der beiden obigen Kugelteile bei Rotation um die Achse, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht und senkrecht auf der Schnittebene steht. D.h., berechnen sie das Integral $J = \int\int\int \rho\,(r')^2\,dV$, wobei $r' = r'(x, y, z)$ der Abstand des Punktes $(x, y, z)$ von der Drehachse sei. (Es ist also $(r')^2 = x^2 + y^2 = (r \sin\theta)^2$, wobei $r$ der Abstand vom Ursprung ist.

11. Ein Kegel habe eine homogene Massenverteilung. Die Grundfläche sei ein Kreis mit Radius $R$, die Höhe sei $h$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse, die durch die Spitze geht und senkrecht auf der Grundebene steht.

    D.h., berechnen sie das Integral $J = \int\int\int \rho\, r^2\, dV$, wobei $r = r(x, y, z)$ der Abstand des Punktes $(x, y, z)$ von der Drehachse sei. Drücken Sie das Endergebnis in der Form $J = cmR^2$ mit einer geeigneten Konstante $c$ und $m = \rho V$ aus.

12. Es gibt eine alternative Definition der Kugelkoordinaten:

    $$x = r\cos\theta\cos\phi, y = r\cos\theta\sin\phi, z = r\sin\theta.$$

    Berechnen Sie die Funktionalmatrix und die Funktionaldeterminante, die man benötigt, wenn man in diesen Kugelkoordinaten Integrationen durchführen möchte.

13. Skizzieren Sie die Menge $B = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq \sqrt{2}, x^2+y^2 \leq 1\}$ und berechnen Sie das Volumen.

14. Berechnen Sie:

    $$\iiint_B f(x, y, z)\, dxdydz,$$

    wobei
    $B$ durch $x^2 + y^2 = 2z$ und $z = 2$ begrenzt wird und $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

15. Berechnen Sie (möglichst auf verschiedene Weisen) das Volumen eines Rohres, das einen Radius von 5 cm hat. Es bestehe aus zwei Endstücken von jeweils 20 cm Länge und einer Biegung um $90^o$. An dieser Biegung sei die Außenseite entlang eines Kreises vom Radius 30 cm und die Innenseite entlang eines Kreises vom Radius 20 cm gebogen. (Radiale Schnitte an dieser Biegung sollen aber immer noch Kreise vom Radius 5 cm sein.)

16. Es sei $f : [0, 1]\times[0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

    Berechnen Sie

    $$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx \text{ und } \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy.$$

17. Berechnen Sie das Kurvenintegral über die Funktion $f(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2y \\ xy^2 \end{pmatrix}$ für die Kurve
$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

18. Gibt es zu der Funktion $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y) \\ \cos(x^2+y) \end{pmatrix}$ eine Potentialfunktion?
Berechnen Sie das Kurvenintegral über $f$ von $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

19. Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral
$$\int_C \Big( 3x^2(1+y^2)z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3(1+y^2)\,dz \Big)$$
wegunabhängig ist und berechnen Sie den Wert des Integrals entlang eines Weges von $(0,0,1)$ nach $(2,4,1)$.

20. Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers, der von einer Kugel mit Radius 2 herausgeschnitten wird, wenn sie von einem Zylinder mit Radius 1 durchbohrt wird, so daß die Achse des Zylinders durch den Kugelmittelpunkt geht.

21. Sei
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \cosh x \end{pmatrix} : -2 \le x \le 2,\ -10 \le y \le 10 \right\}$$
eine Fläche im Raum.
    a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $F$.
    b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\iint\limits_F \frac{xy}{z}\,do$, (mit $z = \cosh x$).

22. a) Sei $v : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{n_1}$ und $f : \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{n_2}$. Geben Sie $m_1, n_1, m_2, n_2$ geeignet an, so dass die Ausdrücke div rot v und rot grad f definiert sind. Unter welchen weiteren Voraussetzungen können Sie div rot $v = 0$ bzw. rot grad $f = \vec{0}$ zeigen?
    b) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation des Vektorfeldes
$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2ze^{2x} - xy - 2z \\ 2x^2z \\ e^{2x}(2z^2-1) + yz + 2x \end{pmatrix}.$$

23. Sei $G$ ein Gebiet mit $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -\sin x \leq y \leq \cos x\}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\partial G} \Big(2y \cosh y + (x^2 - y^2) \sinh y\Big) \cos x \, dx + \Big(2x \cos x + (x^2 - y^2) \sin x\Big) \cosh y \, dy$$

über den Rand des Gebietes $G$, indem Sie einen geeigneten Integralsatz anwenden.

24. a) Sei $G$ der Kreis mit
$$G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$
Berechnen Sie das Kurvenintegral über die Funktion $F(x, y) = \begin{pmatrix} -x^2 y \\ xy^2 \end{pmatrix}$ entlang des Rands von $G$ (in positivem Umlaufsinn), indem Sie den Satz von Gauß in der Ebene anwenden.

    b) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 y \\ y \end{pmatrix}$ und der Zylinder $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ mit der Oberfläche $F$. Verwenden Sie den Satz von Gauß, um das Integral
$$\iint_F \vec{v} \cdot \vec{n} \, do$$
zu berechnen.

25. Ein Kegel $K$ sei gegeben durch $K = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 5 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Der Kegelrand $\partial K$ besteht aus dem Mantel und der Grundfläche. Ein Vektorfeld sei gegeben durch $\vec{f}(x, y, z) = (x, y + 1, z + 2)$.

    a) Berechnen Sie $\iint_{\partial K} \vec{f} \, d\vec{F}$ direkt durch Parametrisierung des Kegelrandes.

    b) Berechnen Sie (noch einmal) $\iint_{\partial K} \vec{f} \, d\vec{F}$ durch Anwendung eines geeigneten Integralsatzes, (und vergleichen Sie mit Teil a)).

26. Ein Luftballon sei über die Kreisscheibe $K = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = R^2\}$ nach oben (in positive $z$-Richtung) aufgeblasen, aber eine genaue Lage der oberen Luftballonsfläche $L$ sei nicht bekannt. Ein Vektorfeld sei gegeben durch $\vec{f}(x, y, z) = (y, z, x)$.

    a) Berechnen Sie div $\vec{f}$ und zeigen Sie, dass es ein Feld $\vec{v}$ gibt, mit $\vec{f} = \text{rot}\, \vec{v}$. (Geben Sie eine konkrete Lösung für $\vec{v}$ an).

    b) Zeigen Sie, durch Anwendung eines geeigneten Integralsatzes, dass $\iint_L \vec{f} \, d\vec{F}$ durch $\iint_K \vec{f} \, d\vec{F}$ berechnet werden kann, und berechnen Sie es. Berechnen Sie auch $\int_C \vec{v} \, d\vec{r}$, wobei $\vec{v}$ das Feld aus Teil a) ist, und $C$ der Kreisrand von $K$.

27. Berechnen Sie (z.B. aus bereits bekannten Reihenwerten)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

28. Berechnen Sie mittels der Parsevalgleichung aus der Fourierreihe für $f(x) = x^2$ (siehe Skript) den Wert von
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

29. (Rechteckschwingung). Es sei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$ Berechnen Sie die relle Fourierentwicklung. Skizzieren Sie die Funktion, und die Summe für 5 Summanden. Untersuchen Sie, was an den Sprungstellen passiert. Setzen Sie einen geeigneten Wert für $x$ ein, um den Wert für
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$
zu berechnen.

30. (Zweiweg-gleichgerichteter Sinus). Es sei $f(x) = |\sin x|$. Berechnen Sie die relle und die komplexe Fourierentwicklung. Konvergiert die Reihe überall gegen die Funktion $f$? Seien $c_k$ die Koeffizienten von $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$.

    Berechnen Sie den sogenannten Gleichspannungswert $\frac{a_0}{2}$ und den sogenannten Klirrfaktor
$$\sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2}}.$$

31. Lösen Sie die Schwingungsgleichung
$$u_{xx} = 4u_{tt}, \quad u(0,t) = u(3\pi,t) = 0$$
mit den Anfangsbedingungen
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für } 0 \le x \le 2\pi \\ 3\pi - x & \text{für } 2\pi \le x \le 3\pi \end{cases}$$
und
$$u_t(x,0) = \sin(x) + \sin(3x).$$

32. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Funktionen:

    (a) $f(x) = e^{-2|x+1|}$

    (b) $f(x) = \max(0, 1-x^2)$.

33. Es sei $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbare Funktion. Es sei $f(0) = 0$ und $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Finden Sie $v$ und zeigen Sie, dass $f(z) = ze^z$ gilt.

34. Sei $z = x + iy$. Stellen Sie Real- und Imaginärteil der Funktionen a) $\sin(z)$, b) $\tan(z)$ als Funktionen von $x$ und $y$ dar. Prüfen Sie die Gültigkeit der Cauchy-Riemann-Gleichungen für diese Funktionen.

35. a) Schreiben Sie $\tan z$ mit Hilfe von $w = e^{iz}$, und geben Sie die quadratische Gleichung an, die $w$ erfüllen muss, damit $\tan z = a$ gilt. Finden Sie daraus alle Lösungen für $\tan z = \sqrt{3} - 2i$.

    b) Zeigen Sie, dass $\tan z$ bis auf zwei Werte alle komplexen Zahlen annimmt. (Hinweis: $e^z$ wird nie 0 (warum?))

36. Geben Sie alle(!) komplexen Werte von $i^i$ und $1^{2i}$ an.

37. Es sei $f(z) = \bar{z}$. Berechnen Sie (explizit durch ein Wegintegral) $\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$. (Der Kreis werde in Gegenuhrzeigerrichtung durchlaufen). Warum widerspricht dies Ergebnis nicht dem Cauchy-schen Integralsatz?

38. Berechnen Sie $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z$, $\oint_{|z-2|=3} \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z$, $\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z$.

39. Berechnen Sie $\oint_{|z|=1} \frac{2+\frac{1}{z}}{z}\,\mathrm{d}z$, $\oint_{|z-2|=3} \frac{z^2}{z-2}\,\mathrm{d}z$.

40. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)^n}{n!} z^n$

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$

    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$.

Hinweise: zu 34) Für $\tan z$ kann $u$ kann als $u(x,y) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+\cosh(2y)}$ geschrieben werden.
zu 35), 36) und 40) hilft auch Analysis T1.

**1. Klausur am 9. Mai, 18.00 in P1. Bitte im Prüfungssystem anmelden.**

41. Berechnen Sie $\oint_{|z|=R} \frac{1}{z(z-3)}\,\mathrm{d}z$, und $\oint_{|z|=R} \frac{\sin(\pi z)}{z(2z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z$,
für alle denkbaren Kreisradien $R > 0$. (Umlaufrichtung: Gegenuhrzeigersinn).

42. Berechnen Sie $\oint_\gamma \frac{z^2}{z-i}\,\mathrm{d}z$, und $\oint_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$,
wobei $\gamma$ der in Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Kreis um $z = 0$ mit Radius $R = 2$ sei.

43. Berechnen Sie $\oint_\gamma \mathrm{Re}\, z\,\mathrm{d}z$,
wobei $\gamma$ das in Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Dreieck, mit Eckpunkten $0, 1, 1+i$ ist.

44. Bestimmen Sie alle auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen, für die (für alle $z \in \mathbb{C}$)
$$|f(z)| \leq |\, z\, |$$
gilt.

45. Es bezeichne $K_r(0)$ den (in positiver Richtung durchlaufenen) Kreis um 0 mit Radius $r \neq 1$. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie (für alle $k, r$)
$$I_{k,r} = \oint_{K_r(0)} \frac{dz}{z^k(1-z^3).}$$
Hinweis: für $r < 1$ können Sie $\dfrac{1}{1-z^3}$ in eine geometrische Reihe entwickeln. Für $r > 1$ können Sie dies etwas modifizieren.

46. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$(a) \oint_{C_a} \frac{z^2+1}{(z-i)^2}\, dz \quad (b) \oint_{C_b} \frac{z^2 e^z}{(z+1)^3}\, dz.$$

wobei $C_a$ das positiv orientierte Rechteck mit Ecken $-1, 1, 1+2i, -1+2i$, $C_b$ den Kreis mit Radius 2 um $z=0$ bezeichnen. Berechnen Sie dies einerseits mit Cauchy, andererseits mit dem Residuensatz.

47. Bestimmen Sie die Lösung der Potentialgleichung

$$\triangle u = 0, \quad u(\cos(t), \sin(t)) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf dem Inneren des Einheitskreises.

48. Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und deren Typ

$$(a)\ f(z) = \frac{\cos(z)}{\cosh(z)^2}, \quad (b)\ f(z) = \frac{z^3}{(e^z-1)^2}, \quad (c)\ f(z) = \frac{e^z}{z^3}.$$

49. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)}\, dx.$$

Können Sie mit der gleichen Methode das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-4)}\, dx$$

berechnen?

50. Berechnen Sie die Integrale

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4)(x^2+9)}\, dx, \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+6x+10}\, dx, \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\, dx,$$

mittels Residuenrechnung.

51. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{3+4\sin x}{5+3\cos x}\,dx$ mittels Residuenrechnung. (Hinweis: wo liegen die Polstellen?)

52. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+3(\cos t)^2}\,dt$.

53. Berechnen Sie
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+6x+8}\,dx.$$
Erläutern Sie den Integrationsweg, der aus 4 Teilen besteht, und die Abschätzungen der Integralanteile. Verwenden Sie $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\log z) = \exp(\frac{1}{2}(\ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)))$ mit $\mathrm{Arg}(1) = 2\pi i$.

54. Berechnen Sie a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx$ und b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}\,dx$. Erläutern Sie den Integrationsweg, und führen Sie die Abschätzungen der einzelnen Integralanteile und den Grenzübergang durch.

55. Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be the function defined by $f(z) = e^{-z^2}$. Let $R(K)$ denote the rectangle defined by the four points $P_1 = -K+0i$, $P_2 = +K+0i$, $P_3 = +K+\frac{1}{2}i$, $P_4 = -K+\frac{1}{2}i$.
Let $\gamma_1$ denote the path along the edge connecting $P_1$ and $P_2$,
Let $\gamma_2$ denote the path along the edge connecting $P_2$ and $P_3$,
Let $\gamma_3$ denote the path along the edge connecting $P_3$ and $P_4$,
Let $\gamma_4$ denote the path along the edge connecting $P_4$ and $P_1$.

Note: it is advisable to use a parametrization for the contour lines that keeps $z$ simple but shifts any difficulty to the boundaries. For example, for $\gamma_1$ use $\varphi(t) = z = t$, where $-K \le t \le K$. This keeps $e^{-z^2}$ much simpler than $z = -K + 2tK$, with $0 \le t \le 1$. So, which simple parametrization do you get for $\gamma_2$ etc?

i) Draw the integration contour in the Argand diagram.

ii) Show that $\int_{\partial R(K)} f(z)\,dz = 0$. Here $\partial R(K)$ denotes the boundary of the rectangle $R(K)$.

iii) Show that $\displaystyle\lim_{K\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$, and similarly $\displaystyle\lim_{K\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0$. Use the above results, and (without proof) the well known result $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ to conclude that $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{1/4}}$.

56. Zeigen Sie, daß alle Nullstellen des Polynoms

$$z^{39} - 3z^{25} + 8z^{17} - 19z^{10} - 4z^4 + 2$$

Betrag $< 2$ haben. Wieviele Nullstellen liegen innerhalb des Einheitskreises?

57. Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion $f(t) = t^2 \cos(2t)$.

58. Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq \pi \\ \sin(t) & \text{für } t > \pi. \end{cases}$$

59. a) Es sei $\omega$ eine positive reelle Konstante. Berechnen Sie die Laplacetransformierte zu $f(t) = \frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)}{2\omega^3}$.
(Das Endergebnis vereinfachen!)

    b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y''(t) + 4y(t) = \sin(\omega t), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

unter Verwendung der Laplace-Transformation. Hinweis: Bei der Partialbruchzerlegung die zwei Fälle $\omega^2 \neq 4$ bzw. $\omega^2 = 4$ unterscheiden. Im zweiten Fall kann man a) verwenden.

60. Gegen seien zwei gebrochen lineare Abbildungen, $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ und $f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$. Zeigen Sie, dass $f_1(f_2(z))$ ebenfalls gebrochen linear ist, und erläutern Sie einen Zusammenhang zur Matrixmultiplikation von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

61. Geben Sie eine gebrochen lineare Abbildung an, die den Kreis $|z| = 2$ auf den Kreis $|w + 1| = 1$ abbildet. Ist diese Abbildung eindeutig?

Hinweis: Besprechung der Übungen am Dienstag 21.6. zur Zeit der Vorlesung (10 Uhr ct). Hausaufgaben sind nicht anzukreuzen. Wer noch vorrechnen muss, bitte am 21.6. vorrechnen.
Am Donnerstag 16.6. während der Übungen Fragestunde.
Um 18 Uhr Klausur in HS I13.