37. Es sei $f(z) = \bar{z}$. Berechnen Sie (explizit durch ein Wegintegral) $\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$. (Der Kreis werde in Gegenuhrzeigerrichtung durchlaufen). Warum widerspricht dies Ergebnis nicht dem Cauchy-schen Integralsatz?

38. Berechnen Sie $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z$, $\oint_{|z-2|=3} \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z$, $\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z$.

39. Berechnen Sie $\oint_{|z|=1} \frac{2+\frac{1}{z}}{z}\,\mathrm{d}z$, $\oint_{|z-2|=3} \frac{z^2}{z-2}\,\mathrm{d}z$.

40. Berechnen Sie $\oint_\gamma \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$, wobei $\gamma$ das in Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Dreieck, mit Eckpunkten $0, 1, 1+i$ ist.

41. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale

$$(a) \oint_{C_a} \frac{z^2+2}{(z-i)^2}\,dz \quad (b) \oint_{C_b} \frac{z^2 e^z}{(z+1)^3}\,dz.$$

wobei $C_a$ das positiv orientierte Rechteck mit Ecken $-1, 1, 1+2i, -1+2i$, und $C_b$ den Kreis mit Radius 2 um $z = 0$ bezeichnen. Berechnen Sie dies einerseits mit Cauchy, andererseits mit dem Residuensatz.

42. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+6x+8}\,dx.$$

Erläutern Sie den Integrationsweg, der aus 4 Teilen besteht, und die Abschätzungen der Integralanteile. Verwenden Sie $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\log z) = \exp(\frac{1}{2}(\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)))$ mit $\operatorname{Arg}(1) = 2\pi i$.

43. Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und deren Typ

$$(a)\ f(z) = \frac{\cos(z)}{\cosh(z)^2}, \quad (b)\ f(z) = \frac{z^3}{(e^z-1)^2}, \quad (c)\ f(z) = \frac{e^z}{z^3}.$$

44. Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurentreihe von

$$\frac{1}{z\sinh(z)\sin(z)},$$

entwickelt an der Stelle $z = 0$.