45. Berechnen Sie das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)}\,dx.$$
Können Sie mit der gleichen Methode das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-4)}\,dx$$
berechnen?

46. Berechnen Sie die Integrale
$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx, \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+6x+10}\,dx, \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,dx,$$
mittels Residuenrechnung.

47. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{3+4\sin x}{5+3\cos x}\,dx$ mittels Residuenrechnung. (Hinweis: wo liegen die Polstellen?)

48. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+3(\cos t)^2}\,dt.$

49. Berechnen Sie
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+6x+8}\,dx.$$
Erläutern Sie den Integrationsweg, der aus 4 Teilen besteht, und die Abschätzungen der Integralanteile. Verwenden Sie $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\log z) = \exp(\frac{1}{2}(\ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)))$ mit $\mathrm{Arg}(1) = 2\pi i$.

50. Berechnen Sie a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$ und b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}\,dx$. Erläutern Sie den Integrationsweg, und führen Sie die Abschätzungen der einzelnen Integralanteile und den Grenzübergang durch.

51. Benützen Sie
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$
um die Integrale
$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx$$
zu berechnen. (Hinweis: integrieren Sie $\exp(-z^2)$ über den Integrationsweg $z = t$, $t \in [0, R]$, $z = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $z = te^{\pi i/4}$, $t \in [0, R]$ und führen Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ aus.)

Bitte Umblättern

52. Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be the function defined by $f(z) = e^{-z^2}$. Let $R(K)$ denote the rectangle defined by the four points $P_1 = -K+0i$, $P_2 = +K+0i$, $P_3 = +K+\frac{1}{2}i$, $P_4 = -K+\frac{1}{2}i$.

Let γ_1 denote the path along the edge connecting P_1 and P_2,
let γ_2 denote the path along the edge connecting P_2 and P_3,
let γ_3 denote the path along the edge connecting P_3 and P_4 and,
let γ_4 denote the path along the edge connecting P_4 and P_1.

Note: it is recommended to use a parametrization for the contour lines which keeps z simple but shifts any difficulty to the boundaries. For example, for γ_1 use $\varphi(t) = z = t$, where $-K \leq t \leq K$. This keeps e^{-z^2} much simpler than the alternative parametrization $z = -K + 2tK$, with $0 \leq t \leq 1$, would do. Which simple parametrization do you get for γ_2 etc?

i) Draw the integration contour in the Argand diagram.

ii) Show that $\int_{\partial R(K)} f(z)\, dz = 0$. Here $\partial R(K)$ denotes the boundary of the rectangle $R(K)$.

iii) Show that $\lim\limits_{K\to\infty} \displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\, dz = 0$, and similarly $\lim\limits_{K\to\infty} \displaystyle\int_{\gamma_4} f(z)\, dz = 0$. Use the above results, and (without proof) the well known result $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ to conclude that $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^{1/4}}$.

Hinweise:
Donnerstag 4. Juni ist Feiertag.
Am Donnerstag 11. Juni kommen, wenn möglich, wieder alle Teilnehmer in beide Übungsgruppen (14.15-16 Uhr).

Hinweis zur Klausur:
Von Fourierreihen (Aufgabe 24) bis Aufgabe 51 (52 wird nicht drankommen...).