1. Test Analysis T2, 26.04.2013, A

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	
Max. Punkte	3	7	3	7	20	
bearbeitet ? bitte ankreuzen!						
erreichte Punkte						

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!!

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend. Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, z.B. weil bereits ein Rechenfehler vorliegt, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

Viel Erfolg!

1. Es sei $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x + y + z \leq 10,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Berechnen Sie das Volumen.

2. Es sei $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{1}{4}R^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Berechnen Sie das Rotationsträgheitsmoment $\iiint \rho\, (r'(x, y, z))^2\, dV$ bei Drehung um die z-Achse ($x = y = 0, z \in \mathbb{R}$). Hierbei sei $r'(x, y, z)$ der Abstand des Punktes von der Drehachse. (Wir nehmen konstante Dichte ρ an). Berechnen Sie auch die Konstante c, wenn man $J = c\, m\, R^2$ schreibt, wobei $m = \rho V$ die Masse des Körpers C ist, und V das Volumen.

3. Gegeben sei das Vektorfeld: $\vec{V} = (x + y, y - x, z)^T$. Sind Wegintegrale in diesem Vektorfeld wegunabhängig? Berechnen Sie das Integral $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{x}$, wobei der Weg entlang der Geraden von $(0, 0, 1)^T$ nach $(1, 0, 0)^T$ geht.

4. Es sei die Fläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 8 - (x^2 + y^2)^{3/2}\}$ und ein Vektorfeld $\vec{V}(x, y, z) = (y^3, 0, 0)$ gegeben.
   a) Berechnen Sie, mit einem geeigneten Integralsatz,
   $$\int_S (\mathrm{rot}\vec{V}) \cdot \vec{n}\, dS,$$
   wobei der Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ zur z-Achse hin orientiert sei.
   b) Es sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}$. Berechnen Sie (durch direkte Parametrisierung)
   $$\int_K (\mathrm{rot}\vec{V}) \cdot \vec{n}\, dK,$$
   wobei der Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ in die negative z-Richtung zeige.
   c) Erklären Sie, was die Aufgabenteile a) und b) miteinander zu tun haben.
   d) Es sei nun F die Oberfläche der Einheitskugel. Geben Sie, mit kurzer Begründung, den folgenden Wert an:
   $$\int_F (\mathrm{rot}\vec{V}) \cdot \vec{n}\, dF$$