1. Zeigen Sie, dass
$$y(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \quad \text{und} \quad y(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$$
Lösungen der Bessel-Gleichung
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0$$
sind.

2. Konstruieren Sie zu dem Anfangswertproblem $y' = x^2 + \frac{y}{2}$, $y(0) = 1$ den Eulerschen Polygonzug mit Schrittweite $h = 0.2$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Verifizieren Sie, dass $y(x) = 17e^{x/2} - 2x^2 - 8x - 16$ die Lösung der Differentialgleichung ist. Berechnen Sie den relativen Fehler an den Stützstellen.

3. Konstruieren Sie zu dem Anfangswertproblem $y' = 3y$, $y(0) = 1$ den Eulerschen Polygonzug mit Schrittweite $h = 0.2$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Verifizieren Sie, dass $y(x) = e^{3x}$ die Lösung der Differentialgleichung ist. Berechnen Sie den relativen Fehler an den Stützstellen.

4. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y' + y\cos x = y^3 \cos x.$$

5. a) Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$y' = 3y, \quad y(1) = 1.$$
   b) Finden Sie alle(!) Lösungen von
$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$
   Beachten Sie, dass $y = 0$ eine Lösung ist, und dass Lösungen keineswegs eindeutig sein müssen.

6. Lösen Sie
   (a) $y' = \dfrac{\cos x \sin y}{\cot y}$ (b) $xy' = y\ln y, \quad y(1) = e$

7. Lösen Sie die Anfangswertaufgaben

   a) $y' = \frac{y}{x} + \cosh\left(\frac{2y}{x}\right), \quad y(1) = 1,$

   b) $5\frac{y^2}{x} - 4y = xy', \quad y(2) = 5.$

8. Prüfen Sie, ob die Differentialgleichungen

   a) $(y - x^3) + (y^3 + x)y' = 0,$

   b) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y + y^2)y' = 0$

   exakt sind, und lösen Sie sie gegebenenfalls.

9. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0 \qquad y(0) = 2$$

   mittels integrierendem Faktor der Form $\mu(x + y)$.

   Geben Sie das Intervall für x an, auf dem die Lösung $y(x)$ mit dem Punkt $(0, 2)$ stetig verbunden ist. Zeichnen Sie dort die Lösung.

10. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$(2x + \ln y - 1)\, y' = 2y$$

   mittels integrierendem Faktor der Form $\mu(y)$.

11. Lösen Sie

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0.$$

12. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 3.$$

Berechnen Sie, ausgehend von $y_0(x) \equiv 3$, mit Hilfe der Picard-Iteration die Approximationen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Raten Sie die allgemeine Form der n-ten Approximation und beweisen Sie diese.

Berechnen Sie dann den Grenzwert $\lim_{n\to} y_n(x)$ und verifizieren Sie das Ergebnis auf andere Weise. (z.B. Dgl. alternativ lösen, oder Probe machen).

13. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$$

Berechnen Sie, ausgehend von $y_0(x) \equiv 1$, mit Hilfe der Picard-Iteration die Approximationen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Raten Sie die allgemeine Form der n-ten Approximation und beweisen Sie diese.

Berechnen Sie dann den Grenzwert $\lim_{n\to} y_n(x)$ und verifizieren Sie das Ergebnis auf andere Weise. (z.B. Dgl. alternativ lösen, oder Probe machen).

14. Lösen Sie die angegebenen Anfangswertprobleme

   a) $y' = \frac{3y}{x} + x^3, \quad y(1) = 2, \quad$ für $x > 0$,
   b) $y' - \frac{1}{2x-1}y = x^2 + x, \quad y(1) = 2, \quad$ für $x > \frac{1}{2}$.

15. Lösen Sie die angegebenen Anfangswertprobleme

   a) $y' = \frac{y}{x} + x^2, \quad y(1) = 1, \quad$ für $x > 0$,
   b) $y' = \frac{1}{x-1}y - x + x^2, \quad y(0) = 3, \quad$ für $x < 1$.

16. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

   a) $y' - \frac{xy}{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}$,
   b) $xy' + (2+2x)y = x^2 + 1$.

Hinweis: Bitte nicht vergessen, sich für den 1. Test anzumelden!
Beachten Sie: Ankreuzen impliziert, dass Sie die Aufgaben *selbst* gerechnet haben! Wenn Sie die Aufgabe nicht halbwegs sinnvoll vorrechnen können (und z.B. von Fotokopien etwas abschreiben, was Sie nicht erklären können), riskieren Sie nicht nur eine schlechte Tafelnote, sondern auch die gesamten Hausaufgabenpunkte!

17. Lösen Sie die Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$xy' - 4y = x^2y^3.$$

18. Lösen Sie das Bernoulli'sche Anfangswertproblem

$$y' + \left(x - \frac{5}{x}\right)y - \frac{xe^{-x^2}}{y} = 0, \quad y(1) = 1.$$

19. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Riccati-Gleichung

$$2x^2y' - 2y^2 - xy + 8x = 0$$

mit dem Ansatz: $y_p = ax^b$. Lösen Sie dann das AWP mit $y(16) = 12$. In welchem Bereich ist die Funktion stetig?

Hinweis: Die Lösung enthält Potenzen von x und die Exponentialfunktion. Diese Lösung ist gesucht. Mathematica/Wolfram Alpha schlägt eine (korrekte aber) viel "kompliziertere" Lösung vor.

Hinweis: Die Klausur vom 5.12. verwendet Stoff bis einschließlich Bernoulli Differentialgleichungen (Aufgabe 18).
Da die Übungen am gleichen Tag stattfinden:
Gehen Sie am Montag nachmittag bitte alle in die erste Übung Ihres Tutors (also um ca 16 Uhr). Die zweite Übungsstunde können sie dann ggf mit Ihrem Tutor noch andere Beispiele durchgehen (Wiederholung). Die Klausur wird ab 18.00 beginnen.

20. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit der Reduktionsmethode von d'Alembert:

$$xy'' - (1+x)y' - 2(x-1)y = 0.$$

Hinweis: $y = \exp(2x)$ ist eine Lösung.

21. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 6(1-x^2)^2.$$

a) Die Funktion $y = x$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Bestimmen Sie die zweite Lösung mit Hilfe der Reduktionsmethode von d'Alembert.

b) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

22. Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(1-x)^2 e^{-x}.$$

a) Die Funktion $y = \exp(x)$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Bestimmen Sie die zweite Lösung mit Hilfe der Reduktionsmethode von d'Alembert.

b) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

23. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y'' + 2y' + y = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 2$.

b) $2y'' + 2y' + 3y = 0$, $y'(0) = 2$, $y(0) = 1$.

c) $y'' - 2y' = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = 1$.

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$.

24. Bestimmen Sie mittels der Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung von

(a) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, (b) $y'' + y = \tan x$.

25. Die Funktionen $e^{2x}\cos 3x$ und $e^{2x}\sin 3x$ bilden das Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Stellen Sie die Differentialgleichung auf.

26. Die Funktionen e^{-x}, xe^{-x} und e^{2x} bilden das Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung. Stellen Sie die Differentialgleichung auf.

27. Geben Sie die allgemeinen Lösungen an für folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{ll} a) & y'' + y' - 6y = 3e^{-4x} \\ b) & y'' + y' - 6y = 50\sin x \\ c) & y'' + y' - 6y = 10e^{2x} \\ d) & y'' + y' - 6y = 3e^{-4x} + \sin x \end{array}$$

28. Geben Sie die allgemeine Lösung an für folgende Differentialgleichung:

$$y'' + y = 4\sin x.$$

29. Geben Sie die allgemeinen Lösungen an für folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{ll} a) & y''' - y = 1 + x^2. \\ b) & y''' - y' = x - 1 \\ c) & y'' - y' = xe^x \\ d) & y'' + 4y' = \cos(2x) \\ e) & y'' - 2y' + 2y = e^x\cos(x). \end{array}$$

30. Geben Sie die allgemeine *homogene* Lösung an für

$$y''' + y'' - 8y' - 12y = f(x).$$

Geben Sie dann den Ansatz vom Typ der rechten Seite an für folgende rechten Seiten (Rechnung nicht erforderlich)

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 5x^2 + 1 \\ f(x) & = & 2\sin(3x) \\ f(x) & = & 2e^{-3x} \\ f(x) & = & 4e^{3x} \\ f(x) & = & 6e^{-2x} \\ f(x) & = & 2\sin(3x) + 6e^{-2x} \end{array}$$

31. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y'' - 10y' - 24y = 28e^{12x} + 296\sin(-2x)$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, die $y(0) = 2$ und $y'(0) = 8$ erfüllt.

(c) Wie würde der Ansatz für eine partikuläre Lösung der obigen Gleichung mit dem Störglied $x^3e^{-2x} + x\cos 12x$ lauten? (Diese Lösung ist nicht zu berechnen!!)

(Alte Prüfungsaufgabe).

Frohe Weihnachten und alles Gute für 2012 wünscht Ihr Differentialgleichungsteam!

32. a) Lösen Sie: $y'' - y = -2x^2 + 8xe^x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3.$
    b) Geben Sie die allgemeine Lösung an: $y'' + 4y = x^2 + 5\cos(2x)$.

33. Warum gibt es keine Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, mit $\{e^x, \sin x\}$ als Lösungsbasis?
    Geben Sie eine Dgl. 3. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) an, mit e^x und $\sin x$ als Lösungen.
    Geben Sie eine Dgl. 2. Ordnung (mit nicht konstanten Koeffizienten) an, mit $\{e^x, \sin x\}$ als Lösungsbasis. (Tipp: Betrachten Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{pmatrix}$, wobei y_1 und y_2 Lösungen seien).

34. Harry Magicus möchte eine neue Funktion von fundamentaler Bedeutung erfinden. Er beobachtet, dass die Funktion $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ Lösung der Differentialgleichung $y' = y$ ist, und ist traurig, dass die fundamental bedeutenden Funktionen wie $\sin x, \cos x, e^{-x}, \sinh x, \cosh x$ mit ihren Potenzreihen wie z.B. $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und der Zusammenhang zu Lösungen von $y'' = y$ bzw. $y'' = -y$ bereits lange vor ihm gefunden wurden. Derzeit untersucht er folgenden heißen Kandidaten für eine Magicus-funktion und braucht Ihre Hilfe: $y_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$.

    a) Wo konvergiert die Funktion?
    b) Geben Sie eine Dgl. der Form $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$ an mit y_m als Lösung.
    c) Geben Sie von dieser Dgl. die allgemeine reelle Lösung an (mit Hilfe der Standardtheorie der Vorlesung).
    d) Zeigen Sie, dass auch y_m' und y_m'' Lösungen sind und zeigen Sie, dass $\{y_m, y_m', y_m''\}$ eine Lösungsbasis ist. (Wie zeigt man lineare Unabhängigkeit?)
    e) Schreiben Sie y_m als Linearkombination der allgemeinen Lösung in Teil c)

35. Die lineare Euler-Differentialgleichung: Es sei

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = q(x).$$

    Eine partikuläre Lösung für die homogene Dgl. findet man mit dem Ansatz $y = x^k$. (Einsetzen in die Dgl. ergibt Gleichung für k, nach k auflösen.).
    Falls die Gleichung die t-fache Nullstelle $k = a$ hat, dann sind $y = x^a, x^a \ln x, \ldots x^a (\ln x)^{t-1}$ Lösungen. Falls $k = \alpha + i\beta$ die t-fache komplexe Nullstelle hat, (also ist auch $k = \alpha - i\beta$ eine t-fache komplexe Nullstelle), dann sind

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \cos(\beta \ln x) \ln x, \ldots, x^\alpha \sin(\beta \ln x), x^\alpha \sin(\beta \ln x) \ln x, \ldots$$

    Lösungen. Für die inhomogene Dgl: Ansatz vom Typ der rechten Seite.
    Lösen Sie (und machen Sie die Probe):

    a) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0,$ *b)* $x^2 y'' - 6y = 12 \ln x$ *c)* $x^2 y'' + xy' + y = x.$

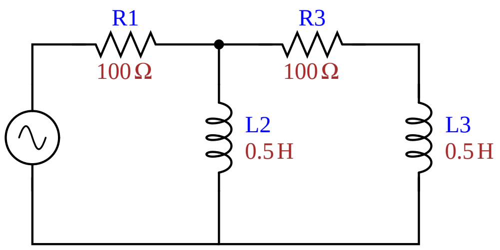

Abbildung 1: Elektrisches Netzwerk

36. Lösen Sie das folgende System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

unter den Anfangsbedingungen $x_1(0) = 0$ und $x_2(0) = 5$.

37. Finden Sie die Allgemeine Lösung des folgenden Systems linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + x_2. \end{aligned}$$

38. Betrachtet wird das System linearer Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax + b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie dieses System.

(b) Schreiben Sie dieses System als lineare Differentialgleichung 3. Ordnung.

39. Gegeben sei das folgende Netzwerk.

Für die Ströme I_k im Netzwerk der Abbildung 1 gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} & I_1 = I_2 + I_3, && \text{(Stromsatz im Knotenpunkt } K\text{)}, \\ & R_1 I_1 + L_2 \dot{I}_2 = U, && \text{(Spannungsatz für die linke Masche)}, \\ & R_3 I_3 + L_3 \dot{I}_3 - L_2 \dot{I}_2 = 0, && \text{(Spannungsatz für die rechte Masche)}. \end{aligned}$$

Die Ströme I_1 und I_3 genügen also dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + L_2 \left(\dot{I}_1 - \dot{I}_3\right) &= U, \\ R_3 I_3 + L_3 \dot{I}_3 - L_2 \left(\dot{I}_1 - \dot{I}_3\right) &= 0. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $I_1(t)$ und $I_3(t)$ für $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $I_1(0) = I_3(0) = 0$ und mit den Größen $R_1 = R_3 = 100\,\Omega$, $L_2 = L_3 = 0.5\,H$, $U = 50\,V$. Welcher stationäre Zustand stellt sich nach hinreichend langer Zeit ein?

40. Untersuchen Sie folgendes System auf Stabilität der Ruhelage $(x, y) = (0, 0)$:

$$\dot{x} = e^{-(x-y)} - \cos x,$$
$$\dot{y} = \sin(x - 3y).$$

41. Untersuchen Sie folgendes System auf Stabilität der Ruhelage $(x, y) = (0, 0)$:

$$\dot{x} = x + y + x \sin y,$$
$$\dot{y} = -2x + y + 1 - \cos xy.$$

42. Bestimmen Sie sämtliche Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x} = x^2 - y,$$
$$\dot{y} = x - y^2$$

und ihren Stabilitätscharakter.

43. Informieren Sie sich darüber, was ein „autonomes System" (im Zusammenhang mit Differentialgleichungen) ist.

Untersuchen Sie den Punkt $(0, 0)$ des autonomen Systems

$$\dot{x} = -x^3 + y, \quad \dot{y} = -x - y^5,$$

d.h zeigen Sie: $(0, 0)$ ist ein Gleichgewichtspunkt. Von welcher Art?

Zur Untersuchung der Art machen Sie den Ansatz $V(x, y) = Ax^2 + By^2$ für eine Ljapunov-Funktion (und wählen A und B geeignet).

Klausureinsicht: Montag 30.1. 14.15-15.45, Steyrergasse 30, A306 (Treppen hoch, dann nach rechts, nach der Glastür links. Das ist nicht der gleiche Raum wie vor einem Jahr).

Schöne Semesterferien und alles Gute für Ihr weiteres Studium!